

ANNALEN DER PHYSIK

5. FOLGE, BAND 20, HEFT 5, AUGUST 1934

Widerstandsänderung dünner Metallschichten durch Aufladung

Von Alexander Deubner

(Mit 4 Figuren)

A. Fragestellung

Lädt man einen metallischen Leiter beispielsweise positiv auf, so entzieht man ihm Elektronen. Theoretisch muß also dadurch die Leitfähigkeit herabgesetzt werden, wenn man nicht annehmen will, daß der Verlust durch nachdissoziierende Elektronen gedeckt wird. Am größten muß die Widerstandsänderung bei dünnen Schichten werden, und nur hier kann man überhaupt daran denken, sie zu messen; denn selbst z. B. bei einer monoatomaren Silberschicht (die technisch nicht realisierbar ist) würde ein Feld von 10^5 Volt/cm erst $\frac{1}{2} \frac{0}{00}$ der in der Schicht befindlichen Elektronen heraus-treiben. Hierbei ist die Annahme gemacht, daß jedes Ag-Atom ein und nur ein Elektron, eben das Valenzelektron, als freies absplattet.

Was wird nun geschehen, wenn die Anzahl Elektronen pro Atom nicht 1 ist, also beispielsweise nur ein Bruchteil aller Atome je ein Elektron absplattet? Auf den ersten Blick (a) scheint die relative Änderung der Anzahl bei Aufladung dann größer zu werden, weil ja im ganzen weniger Elektronen da sind. Aber man kann sich auch vorstellen (b), daß in diesem Fall ein dynamisches Gleichgewicht zwischen dissoziierten und nicht dissoziierten Atomen vorliegt, derart, daß bei Entziehung von Elektronen andere Atome nachdissoziieren. Diese Annahme (b) dürfte sogar wahrscheinlicher sein; man könnte dann die Größe der Änderung ohne weiteres nicht vorausberechnen, da man die Gleichgewichtskonstante nicht kennt. Im Falle (a) müßte man die Annahme machen, daß die Atome, welche als einzige Elektronen absplatten können, auf irgendeine Weise, etwa kristallographisch, vor den andern ausgezeichnet sind.

B. Ältere Arbeiten

Nach der erwähnten Widerstandsänderung bei Aufladung ist schon sehr früh gesucht worden. Als erster hat E. Bosc (1) einen Versuch in der Richtung gemacht, indem er Platin-schichten benutzte, die nach Kundt mit Platinierungsflüssigkeit hergestellt waren. Die ziemlich großen Widerstandsänderungen, die er erhielt, erwiesen sich aber bei seiner eigenen Nachprüfung (2) und auch in einer daraufhin angestellten Arbeit von R. Pohl (3) als vorgetäuscht durch schlechte Isolation der Aufladespannung gegen die Gleichstrombrücke. Bei Berücksichtigung dieser Fehlerquelle konnten beide keinen Aufladungseffekt mehr nachweisen, wobei die Fehlergrenze etwa 10^{-4} war.

Hiernach erschienen, soviel mir bekannt ist, 16 Jahre lang keine Untersuchungen mehr auf diesem Gebiet. Erst 1922 berichtet Perkins (4) über vergebliche Versuche, den Effekt bei Goldschichten, die er durch Kathodenzerstäubung erhalten hatte, nachzuweisen, indem er auch hier einen früher erhaltenen positiven Effekt widerruft. Ebenso findet A. Walter nach einer Mitteilung von Joffé (5) bei kathodenzerstäubten Platinschichten auf Glimmer und Glas keine Wirkung der Aufladung.

Als einziger glaubt Pierucci (6) eine Wirkung der Aufladung auf eine Wolframschicht nachgewiesen zu haben, die durch Verdampfen des Fadens einer Glühlampe in deren Innerem entstanden war. Durch Anbringen zweier Woodmetallelektroden im Inneren und einer Stanniolbelegung außen konnte er den Effekt in einer Gleichstromanordnung eben noch nachweisen. Er schloß auf eine Änderung des Widerstandes von 10^{-5} bei 10000 Volt Aufladung. Leider fehlt jede Angabe des Widerstandes der Schicht, ihre Dicke (nach seiner Angabe 4 Atomschichten) wird optisch bestimmt, was bei dieser Form des Schichtträgers etwas gewagt erscheint. Auch experimentell scheinen mir nicht alle Kontrollversuche gemacht zu sein, um Kriechströme als Fehlerquellen auszuschließen.

Im folgenden wird über Versuche berichtet, die im Laufe der beiden letzten Jahre angestellt wurden, um zuverlässige Ergebnisse über diese Frage zu erhalten¹⁾.

1) Eine vorläufige Mitteilung erschien bereits in den Naturwiss. 22. S. 239. 1934.

C. Experimentelles

1) Die untersuchten Metalle

Nach dem oben Erwähnten muß man annehmen, daß wahrscheinlich ein streng einwertiges Metall den Effekt am besten zeigt. Ich habe daher die ersten Versuche alle mit Silber gemacht; dieses hat vor den sonst in Frage kommenden Alkalien den Vorzug der Untersuchbarkeit in freier Luft, ferner ist es der beste Leiter, so daß aus ihm die dünnsten Schichten herstellbar sind, die noch einen vernünftig meßbaren Widerstand haben. Zum Vergleich wurden Gold und Kupfer gemessen und schließlich noch Wismut wegen eines von anderer Seite erhaltenen merkwürdigen Resultates (7).

Die Herstellung der Schichten geschah durch thermische Verdampfung. Silber, Gold und Kupfer wurden einfach in Form dünner Drähte (0,1 mm) um den Wolframheizfaden (0,3 mm) herumgewickelt; da hierbei stets die ganze Menge des Metalls verdampft wurde, so hatte man die Möglichkeit, aus dieser und den geometrischen Verhältnissen der Verdampfung einen ungefähren Schluß auf die Schichtdicke zu ziehen. Bei Wismut versagte diese Methode, da Bi-Draht zu spröde ist; es wurde daher der Wolframdraht in geschmolzenes, von der Oxydschicht befreites Wismut eingetaucht, wobei eine hinreichende Menge des Metalls an dem Heizfaden hängen blieb. Aufgefangen wurde die Schicht auf einem Stück Jenaer Glasrohr von 12 mm Durchmesser und etwa 7 cm Länge, das vorher gut gereinigt (siedende Chromschwefelsäure) und dann durch chemische Versilberung an den Enden mit Elektroden versehen worden war, die eine Länge von etwa 2—3 cm für die Schicht zwischen sich frei ließen. Das Röhrchen konnte von außen mittels eines Magneten während der Verdampfung gedreht werden. Diese ging selbstverständlich im Hochvakuum vor sich, wobei die Quecksilberdämpfe der Pumpe durch flüssige Luft ausgefroren wurden. Die Verdampfungstemperaturen waren etwa beginnende Rotglut bei Wismut, helle Rotglut bei Silber, Gelbglut bei Gold und helle Gelbglut bei Kupfer. Die Verdampfung war normalerweise in 3—5 Min. beendet. Nach Abstellen und Abkühlen der Pumpe konnte dann die Schicht aus der Verdampfungsapparatur herausgenommen werden.

Zum Messen des Widerstandes wurde das Röhrchen in einen Halter mit zwei Doppelfedern gespannt, die den Strom zuführten. Merkwürdigerweise zeigten nun Silberschichten zunächst stets einen sehr hohen Widerstand, den man erst

durch thermische Behandlung auf den gewünschten Wert herabsetzen konnte. (Diese ersten Kontrollwiderstandsmessungen geschahen einfach mit Gleichspannung, die durch Stöpselpotentiometer variabel war, und Türmchengalvanometer.) Im allgemeinen kam eine Silberschicht mit etwa 10^6 Ohm aus der Verdampfungsapparatur heraus und wurde durch Erwärmen auf etwa 70° in einigen Minuten auf einen Wert von etwa 1000 Ohm gebracht. Noch höheres und längeres Erhitzen ließ den Widerstand wieder stark, bis zur praktischen Isolation, ansteigen. Goldschichten zeigten die Erscheinung in einem schwächeren Maße, auch mußte man hier erheblich höher erhitzen.

Man könnte glauben, es hier mit einer ähnlichen Erscheinung zu tun zu haben, wie sie kürzlich J. Kramer (8) gefunden hat, also um „nichtleitende“ Modifikationen. Kramer selbst hat diesen Effekt allerdings gerade bei Ag und Au nicht gefunden, er würde freilich auch im Widerspruch zu den Resultaten an anderen Metallen stehen, aus denen Kramer durch theoretische Betrachtungen das Nichtauftreten der Erscheinung bei Ag und Au oberhalb der Temperatur der flüssigen Luft herleitet. Man könnte auch als Erklärung an eine Inselbildung denken, die durch Temperaturerhöhung „glattgerüttelt“ wird; doch halte ich dies bei der vorliegenden Dicke der Schichten (Größenordnung im Mittel 40 Atomdurchmesser) für unwahrscheinlich und möchte vorläufig trotz der Theorie Kramers auch hier lieber an eine schlechtleitende Modifikation glauben. Kupfer- und Wismutschichten zeigten keinen nachträglichen Widerstandsabfall durch Temperaturbehandlung.

2. Die Meßanordnung

a) Die Wechselstrombrücke

Wenn man bei diesem Problem zwischen Wechselstrom und Gleichstrom zur Messung des Widerstandes zu wählen hat, so wird ein moderner Experimentator nicht zweifeln, daß er den ersteren zu bevorzugen hat, da hier alle bei Gleichstrommessungen verhängnisvollen Isolationsfehler fortfallen. Allerdings sind die Wechselstrominstrumente unempfindlicher als die für Gleichstrom, indessen hat man ja heute Verstärker, die das mehr als ausgleichen.

Fig. 1 zeigt die Anordnung. Auf die Verwendung von 50 Perioden Netzwechselstrom mußte man verzichten, da er nicht frei genug von Oberwellen war. An diese Eigenschaft

werden gerade bei den vorliegenden Versuchen ganz extreme Anforderungen gestellt, selbst wenn man wie hier ein Vibrationsgalvanometer benutzt. Außerdem störten bei einer Meßfrequenz von 50 Hz die veränderlichen 50-Periodenfelder der Umgebung natürlich besonders. Daher wurde die Wechselspannung durch einen kleinen Tonfrequenzgenerator in Spannungsteilerschaltung erzeugt, bei dem durch ganz niedrige Heiz- und Anodenspannung eine so kleine Schwingungsamplitude erreicht wurde, daß keine Nichtlinearität auftrat, die Oberwellen hervorgerufen hätte.

Die Selbstinduktion des Tonsenders war die Primärwicklung eines Heiztransformators Tr 220/4 Volt, die Frequenz etwa 60 Hz; sie wurde mittels der Röhrenheizung feinreguliert auf die Eigenschwin-

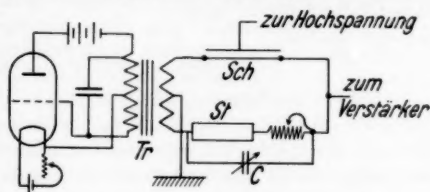


Fig. 1. Schaltschema der Meßanordnung

gung des Vibrationsgalvanometers. Die weitere Schaltung geht klar aus der Figur hervor. An die beiden Enden der Sekundärwicklung von Tr sind in Differentialschaltung die Schicht Sch und ein Stöpselwiderstand St angeschlossen; zu St ist noch ein ganz fein regulierbarer Drehwiderstand von etwa 1 Ohm (Heizregler, mit emailliertem Kupferdraht umwickelt) geschaltet, um vollkommen abgleichen zu können. Der variable Kondensator C war nötig, um die Selbstinduktion des Stöpselwiderstandes zu kompensieren.

Die oben erwähnte ganz kleine Schwingungsamplitude, welche ja die Meßspannung darstellt, scheint zunächst eine unnötige Erschwerung zu sein, da sie die Empfindlichkeit der Messung natürlich herabsetzt. Sie ist aber nicht nur durch die Forderung nach reiner Sinusform bedingt, sondern ebenso sehr durch das Verhalten der Schichten. Man darf, wenn die Schichten konstanten Widerstand haben sollen, nicht mehr als etwa 0,1 Volt an sie anlegen, bei 1000 Ohm Widerstand; das ist also eine Meßleistung von 10^{-5} Watt. Bei höheren Spannungen zeigt die Schicht starke Schwankungen und auch dauernde Änderungen des Widerstandes.

Die kleine Meßleistung mußte also durch einen sehr empfindlichen Indikator ausgeglichen werden. Zunächst wurde versucht, die ganze Empfindlichkeit durch Verstärkung zu erreichen und mit einem relativ unempfindlichen Vibrationsgalvanometer auszukommen; doch zeigte es sich schließlich als

günstiger, weniger zu verstärken und das Vibrationsgalvanometer empfindlicher zu machen (vgl. unten). Wegen der starken magnetischen Störungen konnten nämlich Kopplungstransformatoren im Indikatorkreis nirgends verwendet werden; sie machten sich sofort durch sehr störende Ausschläge des Vibrationsgalvanometers unmöglich, obwohl die ganze Anordnung in Blechkästen eingebaut war. Schließlich erwies sich eine Loewendreifachröhre, mit dem Eingangsgitter unmittelbar an die Brücke angeschlossen, als das Günstigste; sie lieferte eine rund tausendfache Stromverstärkung.

b) *Das Vibrationsgalvanometer*

Dieses Instrument pflegt sich der Physiker, wenn er es braucht, selbst zu bauen. Meist ist keine besondere Empfindlichkeit nötig; man nimmt dann einfach einen Telephonmagneten und setzt einen Stahldraht davor, der fest eingespannt ist, so daß er gut schwingt, und beobachtet seine Spitze mit einem Mikroskop. Oder, für etwas höhere Ansprüche, ersetzt man den Stahldraht durch eine Blattfeder, auf der ein Spiegel zur Ablesung mit dem Fernrohr sitzt. Die Empfindlichkeit dieser Instrumente ist bei etwa 2000 Ohm Widerstand ungefähr 10^{-5} bis 10^{-6} Amp. pro mm. Ich möchte im folgenden zeigen, wie man mit denselben einfachen Mitteln etwa 2 Zehnerpotenzen weiter kommen kann¹⁾.

Man überlegt sich zunächst leicht, daß bei gleicher zugeführter Energie und Frequenz der Ausschlag bei abnehmender schwingender Masse zunehmen muß, wie auch bei anderen Galvanometern. Macht man nun aber die schwingende Feder mit dem Spiegel immer dünner und leichter, so wird die Energieübertragung vom Magneten auf die Feder immer schlechter und der Empfindlichkeitsgewinn geht verloren. Man kann nun dem leicht abhelfen, indem man die Energie nicht direkt auf die feine Feder überträgt, sondern erst auf eine stärkere „Zwischenfeder“, die dann durch mechanische Kopplung die Energie an die Meßfeder weitergibt. Ich möchte dies als „Methode der doppelten Kopplung“ bezeichnen.

Fig. 2 zeigt die praktische Ausführung schematisch. *M* ist ein Magnetsystem aus einem Feldtelefon von 2000 Ohm, vor dem die kräftige, 10 mm breite Stahlfeder *S* schwingen kann.

1) Natürlich kann man auch durch letzte präzisionsmechanische Ausnutzung der bisherigen Prinzipien hochempfindliche Vibrationsgalvanometer bauen; vgl. z. B. Meißner u. Adelsberger, *Ztschr. f. techn. Phys.* 13. S. 475. 1932.

Auf deren oberen Ende ist die feine Feder *U*, aus der Unruhefeder einer Taschenuhr angefertigt, aufge kittet. *U* trägt oben einen kleinen aber gut planen Spiegel *Sp* zur Ablesung. Das Ganze ist zur Erzielung schwacher Dämpfung der Schwingungen auf einen großen Hartholzblock montiert. Zunächst stimmt man nun die feine Feder samt Spiegel etwa auf die gewünschte Schwingung ab (die ja bei unserer Anordnung in gewissen Grenzen veränderlich ist), sodann verändert man die Länge der Zwischenfeder und (zur Feinabstimmung) den Magnetabstand von dieser, bis die maximale Empfindlichkeit erreicht ist. Diese betrug größenordnungsweise $3 \cdot 10^{-8}$ Amp./mm ohne Gleichstrombelastung; wenn der Anodenstrom des Verstärkers das Magnetfeld erhöhte, war sie noch größer. Die Ablesung geschah mittels Fernrohres mit Okularskala, in das der Spiegel das Bild einer Taschenglühlampe hineinreflektierte.

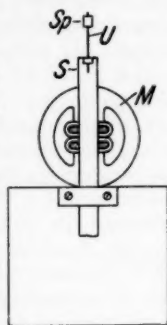


Fig. 2.
Das Vibrationsgalvanometer

c) Die Aufladung der Schichten

Die Metallschicht bildete in unserer Versuchsanordnung einerseits, wie gezeigt, den einen Widerstandszweig einer Wechselstrombrücke; andererseits wurde sie als geerdete Außenbelegung einer Art kleiner Leidener Flasche ausgebildet, deren Innenbelag in Form eines federnden aufgeschlitzten Metallzylinders isoliert in das Glasrohr hineingeschoben wurde (Fig. 3). Bei

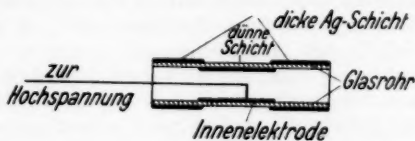


Fig. 3. Schichtträger mit Innenelektrode

Aufladung dieser Innenelektrode lud sich also die Schicht mit entgegengesetztem Vorzeichen auf. Zur Erzeugung der Hochspannung diente eine Gleichrichteranlage, die eine große Leidener Flasche von etwa 10000 cm Kapazität auflud und dann ausgeschaltet wurde, da sie im Betrieb zu starke Störungen verursachte. Die Leidener Flasche lieferte dann eine Anzahl Aufladungen, ohne allzusehr abzufallen (aufzuladende Kapazität etwa 200 cm). Die Spannung an der Innenelektrode wurde mit einem Braunschen Elektrometer auf 2–3% genau gemessen. Das Anlegen der Hochspannung bzw. der Erde ge-

schah über einen so hohen Widerstand (teils Glasrohr mit destilliertem Wasser, teils feuchter Bindfaden), daß die Auf- und Entladung der Schicht 1—2 Sekunden dauerte, wie man am Elektrometer sehen konnte. Anderenfalls wurde die Konstanz des Schichtwiderstandes beeinträchtigt.

3. Die Versuche

a) *Allgemeines*

Nach Herausnehmen der Schicht aus der Verdampfungsapparat wurde der Widerstand erst einmal mit Gleichstrom bestimmt; bei Silber und Gold, wie oben erwähnt, nach der thermischen Behandlung. Nach Einführen der Innenelektrode wurde dann die Schicht in die Meßapparatur eingebaut und der Rheostat abgeglichen, erst ohne, dann mit Verstärkung. Beim erstmaligen Anlegen der Hochspannung gab es nun fast stets eine sehr große bleibende Widerstandsänderung; die nachfolgenden Aufladungen hatten schon kleinere Wirkungen, bis die Schicht sich schließlich allmählich an die Hochspannung gewöhnte. Allerdings durfte man nicht zu hohe Aufladespannungen verwenden, sonst trat die Konstanz des Widerstandes nicht ein; die Schichten vertrugen nur bis etwa 5000 Volt. Auch bei diesen Spannungen mußte man manchmal einen oder zwei Tage Geduld haben, bis die nötige Konstanz erreicht war.

Die großen bleibenden Widerstandsänderungen, meist Erniedrigungen, kann man sich vielleicht vorstellen als bedingt durch die mechanische Beanspruchung der Schicht infolge der elektrischen Anziehung, indem manche kleinsten Teile in eine stabilere Lage gerückt werden. Möglich ist es auch, daß durch unsichtbare Fünkchen eine Verschweißung von Schichtteilen stattfindet, die vorher noch keinen guten Kontakt hatte.

Ist nun die Konstanz des Widerstandes erreicht, so kann man daran gehen, zu prüfen, ob der eigentliche Aufladungseffekt vorhanden ist, und diesen zu messen. Zunächst kann man nachsehen, ob ein bestimmt eingestellter Ausschlag des Vibrationsgalvanometers bei Auf- und Entladung der Schicht systematische Veränderungen außerhalb der (immer noch vorhandenen) Schwankungen zeigt. Ist das der Fall, so kann man schon aus der Ausschlagsgröße und der roh bestimmten Empfindlichkeit der Anordnung auf die Größe des Effekts schließen. Da aber für etwas größere Ausschläge das Vibrationsgalvanometer nicht mehr linear arbeitet, so ist es besser, für die eigentliche Messung mit dem geeichten Feinwiderstand stets auf den Ausschlag Null des Vibrationsgalvanometers zu

kompensieren. Wir besprechen nun im folgenden die Ergebnisse für die untersuchten Metalle.

b) Silber

Silberschichten sind bisher noch nicht auf den Aufladungseffekt hin untersucht worden. Wir deuteten oben an, warum wir gerade bei diesem Metall am ehesten den Effekt zu finden hofften. Diese Hoffnung hat sich erfüllt. Bei Aufladung mit 5000 Volt ändert sich die Breite des Glühlampenbildes im Fernrohr um 40—50 Skalenteile, bei Entladung geht die Änderung wieder innerhalb der Schwankungen zurück. Die Änderung des Widerstandes erfolgt entsprechend der Aufladung in der richtigen Richtung; bei Umpolen der Aufladespannung kehrt sich auch die Änderung der Richtung nach um. Fig. 4 zeigt eine solche Messung. Aus ihr ergibt sich eine Widerstandsänderung von $0,118\%$ auf 5000 Volt. Jeder

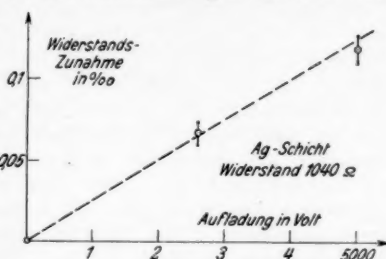


Fig. 4. Aufladungseffekt bei Silber

Meßpunkt ist als Mittel aus je 10 Auf- und Entladungen gewonnen. Bei Umpolen ergab sich für 5500 Volt eine Widerstandsabnahme um $0,115\%$, also innerhalb der Fehler dasselbe.

Die Theorie sagt ja einen linearen Verlauf der Widerstandsänderungen mit der Aufladung voraus. Man kann sich nun eine ganze Anzahl Störeffekte denken, die auch eine Widerstandsänderung ergeben; z. B. vor allem eine Wirkung der Elektrostriktion, die eine Längenänderung des Glasrohres bewirken und die Schicht dadurch in der Längsrichtung ziehen oder drücken würde; oder eine reversible Wirkung der oben erwähnten elektrostatisch-mechanischen Kräfte; oder eine umkehrbare Erwärmung durch Elektrisierung usw. Alle diese Effekte sind aber vom Vorzeichen der Spannung unabhängig, also quadratisch. Daß der Versuch einen so rein linearen Verlauf ergibt, ist demnach eine gewisse Garantie dafür, daß die Widerstandsänderungen nicht durch Störeffekte vorgeht.

Verschiedene Schichten etwa gleichen Widerstandes auf verschiedenen Rohren — das Rohrmaterial ist noch nicht variiert worden — zeigen den gleichen Effekt mit einer

Schwankung von etwa 20%. Dabei ist zu beachten, daß man mit der Dicke der Schichten auf sehr enge Grenzen angewiesen ist. Halb so dicke Schichten wie die gemessenen leiten schon praktisch nicht mehr, auch nicht nach thermischer Behandlung. Schichten größerer Dicke sind noch nicht untersucht.

Die Dicke der zu Fig. 4 gehörigen Schicht war, nach der gesamten verdampften Silbermenge geschätzt, etwa 40 Atomdurchmesser (im Mittel). Nach der für normales Metall geltenden Leitfähigkeit müßte diese Schicht etwa 1 Ohm haben, in Wirklichkeit hat sie 1000 Ohm. Woher dieser Unterschied kommt, ist vorläufig noch ungeklärt. Zum Teil liegt es wohl daran, daß auch nach der Umwandlung die normale Leitfähigkeit noch nicht erreicht wird, zum Teil daran, daß die Schicht nicht plan ist, sondern Berge und Täler zeigt; zum Teil möchte ich auch glauben, daß gar nicht alle auf das Glasrohr auffallenden Atome dort bleiben, sondern irgendwo hin reflektiert werden. Legt man trotzdem die 40 Atomschichten als Dicke zugrunde, so berechnet sich ein Effekt von $0,25 \cdot 10^{-4}$, also der 4. bis 5. Teil des von uns gefundenen Effekts. (Die Dielektrizitätskonstante des Glases ist dabei zu 5 angenommen.) Die Differenz dürfte im wesentlichen an den erwähnten Mängeln der Dickenbestimmung liegen, die es bei den späteren Untersuchungen zu verbessern gilt.

c) Gold

Das Gold stimmt mit dem Silber darin überein, daß seine Schichten zunächst höheren Widerstand haben und sich thermisch „verbessern“ lassen, wenn auch in schwächerem Maße als das Silber. Die Schichten zeichnen sich durch große Stabilität aus, was ihre Untersuchung erleichtert. Allerdings ist der Aufladungseffekt vorläufig (bei der untersuchten Schicht war der Widerstand 800 Ohm) gerade oberhalb der Meßbarkeitsgrenze (1–2 mm Ausschlag, entsprechend einem Effekt von etwa $8 \cdot 10^{-6} \pm 50\%$), doch trat er deutlich auf und stets mit dem richtigen Vorzeichen. Die Wirkung ist also um etwa eine Größenordnung kleiner als beim Silber.

Gold ist chemisch ein- und dreiwertig. Man kann sich also vorstellen, daß im wesentlichen zunächst die die Einwertigkeit bedingenden Elektronen, vielleicht unter geringer Beteiligung der „Dreiwertigen“, leiten. Bei Entziehung von Elektronen würde ein wesentlicher Teil des Verlustes aus der Reserve der Dreiwertigen gedeckt, bei Hinzufügung ent-

sprechend viele in die Reserve zurückgezogen. Ein genaueres Bild von diesen Vorgängen sich zu machen, ist wohl noch verfrüht.

d) Kupfer

Bei Kupfer sind die Elektronenverhältnisse ähnlich wie bei Gold. Ich erwartete daher bei ihm einen ähnlichen Effekt zu finden. Nun ist Kupfer ein relativ unedles Metall; das machte sich dadurch bemerkbar, daß die Widerstände an der Luft sehr inkonstant waren und dauernd zunahmen. Doch fanden sich bei einer untersuchten Schicht (Widerstand etwa 1100 Ohm) lichte Momente, in denen Konstanz herrschte und eine Beobachtung möglich war. Es zeigte sich bei 5000 Volt Aufladung absolut keine Widerstandsänderung; ich glaube sagen zu können: sie war sicher kleiner als $2 \cdot 10^{-6}$. Hier mußte also der Ersatz aus der „Zweiwertigen-Reserve“ ein vollständiger sein, ebenso der umgekehrte Vorgang.

e) Wismut

Hier machte sich die unedle Natur des Metalls noch stärker bemerkbar als beim Kupfer. Trotz der einige Male dickeren Schicht, die wegen der schlechteren Leitfähigkeit des Wismuts verwendet werden mußte, war die Konstanz noch schlechter. Immerhin konnte man auf etwa 10^{-5} genau beobachten, und nach den Ergebnissen von Kramer und Zahn (7) hatte ich einen Rieseneffekt erwartet. Aber nichts zeigte sich; die Widerstandsänderungen können höchstens von derselben Größenordnung wie beim Gold sein, bei gleichem Widerstand der Schicht.

Kramer und Zahn folgern aus ihren Beobachtungen und aus denen anderer Autoren, daß beim Wismut wahrscheinlich höchstens 1 Elektron auf etwa 100 Atome komme. Daraus braucht aber durchaus kein besonders großer Aufladungseffekt zu folgen, denn es kann ja Nachdissoziation eintreten. Ob tatsächlich ein Effekt auftritt und in welcher Größe, müssen weitere Untersuchungen zeigen, bei denen die Schicht in einer inaktiven Atmosphäre gehalten werden soll.

D. Aufladungseffekt und optische Absorption

Wir wollen noch einmal die Ergebnisse an allen Metallen vergleichen und zugleich ihr optisches Verhalten ins Auge fassen. Das Silber, das den größten Effekt zeigt (wie wir annehmen, den vollen theoretischen Betrag), ist vor den

anderen Metallen zugleich durch eine tiefe „Absorptionslücke“ im Violett ausgezeichnet (9). Diese trennt die Absorption im Langwelligen, die den Valenzelektronen zukommt, von der durch die gebundenen Elektronen bedingten kurzwelligen Absorption. Diese Absorptionslücke symbolisiert uns die Kluft, die im Silber, bezüglich der Ablösungsenergie, zwischen freien und gebundenen Elektronen herrscht. Ein Elektron wird leicht abgegeben, weitere unter normalen Umständen nicht. Daher ist das Silber streng einwertig, und daher können bei Entziehung freier Elektronen keine gebundenen nachdissoziieren. Bei allen anderen untersuchten Metallen sind die Absorptionskurven wesentlich ausgeglichener, das Energiespektrum dichter besetzt, und das kommt chemisch in der Verschiedenwertigkeit zum Ausdruck: für eine bestimmte Elektronengruppe reicht die Energie bei gewissen Reaktionen zur Ablösung aus, bei anderen Reaktionen nicht. Im Metall werden entsprechend die gebundenen Elektronen bei der Leitung die freien ganz oder teilweise ersetzen können.

E. Ausblick

Die hier vorgelegten experimentellen Ergebnisse sind nur die eines ersten Schrittes. Ehe man weitere, etwa quantitative, theoretische Schlüsse aus den Versuchen ziehen kann, wird noch viel Arbeit zu leisten sein. Es müssen möglichst alle Metalle untersucht werden, vor allem die Alkalien. Dabei wird man bei den chemisch angreifbaren Metallen Vakuum- oder Edelgasatmosphäre anwenden müssen. Der Einfluß der Unterlage muß geklärt werden. Manche der früheren Autoren haben dem Dielektrikum die Schuld zugeschoben, daß sie *keinen* Effekt fanden, indem sie annahmen, die elektrostatisch gebundenen Elektronen trügen nicht zur Leitfähigkeit bei (5). Man wird nun umgekehrt durch Messungen ohne festes oder flüssiges Dielektrikum zeigen müssen, daß dieses in *unseren* Versuchen nicht am *Auftreten* des Effekts schuld ist, obwohl wir glauben, daß ihn dann *alle* Schichten zeigen müßten, nicht bloß Silber und ein wenig das Gold. Bei dieser Gelegenheit wird man auch den etwaigen Einfluß der hügeligen Struktur der Schicht studieren können; wenn diese sehr ausgeprägt ist, wird es nicht gleichgültig sein, ob die an die Unterlage grenzende oder die freie Oberfläche der Schicht aufgeladen wird. Zur quantitativen Beurteilung der ganzen Versuche muß dann vor allem eine einwandfreie Methode zur Dickenmessung gefunden werden.

F. Zusammenfassung

1. Nach kurzer Besprechung älterer Arbeiten wird eine Wechselstromanordnung beschrieben, die es gestattet, sehr kleine Änderungen eines Widerstandes in der Größenordnung von 10^{-6} nachzuweisen. Sie besteht aus Röhrengenerator, Verstärker und Vibrationsgalvanometer. Über das letztere, das selbstkonstruiert ist, werden der allgemeinen Bedeutung wegen nähere Angaben gemacht.

2. Die Versuche ergeben eine gut meßbare Änderung (10^{-4}) des Widerstandes einer Silberschicht von etwa 40 Atomlagen bei Aufladung von 5000 Volt. Für eine Goldschicht wird ein etwa 10mal kleinerer Effekt gefunden, für Kupfer und Wismut gar keine Widerstandsänderung innerhalb der Meßfehler.

3. Die Diskussion der Versuche ergibt, daß man sich eine durchaus annehmbare theoretische Vorstellung über die Wirkung der Aufladung auf die Elektronenzahl machen kann, die, qualitativ wenigstens, mit den Experimenten in Einklang ist. Es wird jedoch auf die Notwendigkeit weiterer Versuche hingewiesen.

Literaturverzeichnis

- 1) E. Bose, Phys. Ztschr. 7. S. 373. 1906.
- 2) E. Bose, Phys. Ztschr. 7. S. 462. 1906.
- 3) R. Pohl, Phys. Ztschr. 7. S. 500. 1906.
- 4) H. Perkins, Compt. rend. 175. S. 363. 1922.
- 5) A. Joffe, Phys. Ztschr. der Sowj. Un. 1. S. 182. 1932.
- 6) M. Pierucci, N. Cim. 9. S. 36. 1932.
- 7) J. Kramer u. H. Zahn, Ztschr. f. Phys. 86. S. 413. 1933.
- 8) J. Kramer, Ann. d. Phys. [5] 19. S. 37. 1934.
- 9) A. Smakula, Ztschr. f. Phys. 86. S. 185. 1933.

Berlin, Physikalisches Institut der Universität, April 1934.

(Eingegangen 4. Mai 1934)

Anmerkung bei der Korrektur

Inzwischen war Herr Kramer so freundlich, mir eine Arbeit von Perucca über das gleiche Thema zur Einsicht zu überlassen, und auch Herr Perucca selbst hatte die Güte, mir einen Sonderdruck seiner Arbeit in den Compt. rend. 198. S. 456. 1934 zu übersenden. Es treten dort bei sehr dünnen kathodenzerstäubten Au- und Pt-Schichten, die nur noch mit dem Elektrometer meßbar sind (10^{10} — 10^{11} Ohm) Widerstandsänderungen bis zu 40% auf, aber im wesentlichen unabhängig

von der Richtung der Aufladung. (Es sind stets Widerstandserniedrigungen.) Herr Perucca äußert die Ansicht, daß hier bei dieser dünnen Schicht ein anderer Effekt wirksam ist als der auf dem Elektronenhaushalt beruhende, der in vorliegender Arbeit behandelt ist. Er denkt speziell an eine Orientierung der Metallteilchen durch das Feld. Herr Kramer schließt sich brieflich der Meinung an, daß es ein andersgearteter Effekt sei, und auch ich glaube, daß er, ebenso wie der ja auch vom Vorzeichen unabhängige Kramer-Zahnsche Kapazitätseffekt, mit der Elektronentheorie der Metalle nichts zu tun hat. Die geringe Asymmetrie des Effekts, die von einem linearen Glied herrührt, hat das entgegengesetzte Vorzeichen wie das, welches nötig wäre, um sie dem Elektroneneffekt zuzuschreiben. Ich bin zur Zeit damit beschäftigt, zu untersuchen, ob nicht eine der vielen möglichen Fehlerquellen den ganzen Effekt vortäuscht. Dabei habe ich zunächst gefunden, daß nach Erreichung einer gewissen Schichtdicke kathodenzerstäubtes Platin ganz von selbst seinen Widerstand vermindert, z. B. von $9 \cdot 10^{11}$ auf $2 \cdot 10^{10}$ Ohm, ohne jede Behandlung. Die Veränderung dauert mehrere Stunden: so lange müßte man also jedesmal mit der Messung warten. Ich hoffe, bald das Ergebnis dieser Untersuchung mitteilen zu können.

Über das Verhalten biologischer Körper im Hochfrequenzfeld

Von Hermann Dänzer

(Mit 9 Figuren)

I. Allgemeine theoretische Grundlagen

In früheren Mitteilungen¹⁾ unseres Institutes wurde über Untersuchungen berichtet, die das Studium des Verhaltens biologischer Körper im hochfrequenten elektrischen Feld zum Gegenstand haben. Da unsere Kenntnisse der dielektrischen Eigenschaften biologischer Körper noch sehr mangelhaft sind, wurden zunächst die einfachen biologischen Körper in den Untersuchungskreis einbezogen. Von besonderer Bedeutung erwies sich die Kenntnis der dielektrischen Konstanten dieser Substanzen, nachdem in einer Reihe von Arbeiten, insbesondere von Esau und Schliephake, die medizinische Nutzbarmachung der Kurzwellen erfolgreich in Angriff genommen wurde. Verschiedene Autoren, die sich mit diesbezüglichen Untersuchungen befaßten, berichteten über spezifische Wirkungen der Kurzwellen, die bei der Anwendung der sogenannten Kondensatorfeldmethode an verschiedenen Versuchsobjekten beobachtet wurden. Da zunächst versucht werden muß, vom rein physikalischen Standpunkt aus Möglichkeiten für das Auftreten solcher Effekte aufzudecken, erscheint es notwendig, die physikalischen Grundlagen des neuen Anwendungsgebietes der Hochfrequenzströme erneut durchzudenken. Der Verf. hat sich zur Aufgabe gestellt, unter Weiterführung der genannten experimentellen Arbeiten auch die theoretische Seite des Problemkreises näher zu verfolgen. In dieser Beziehung lagen bis jetzt nur die von Pätzold²⁾ angestellten Überlegungen vor.

1) E. May u. H. Schaefer, *Ztschr. f. Phys.* **73**. S. 452. 1931; E. May u. H. Schaefer, *Ztschr. f. exper. Med.* **84**. S. 240. 1932; H. Schaefer, *Ztschr. f. Phys.* **77**. S. 117. 1932; H. Schaefer, *Ztschr. f. exper. Med.* **92**. S. 341. 1933; B. Rajewsky, *Klin. Wochenschr.* Nr. 4. 1934.

2) J. Pätzold, *Ztschr. f. Hochfrequenztechn.* **36**. S. 85. 1930.

Vom theoretischen Standpunkt aus bieten sich zwei Möglichkeiten für das Verständnis der dielektrischen Eigenschaften der in Frage kommenden Substanzen in Abhängigkeit von der Frequenz. Entweder man nimmt die Existenz von (permanenten oder induzierten) Dipolen an, benutzt also die Gedankengänge der Debyeschen Theorie, oder man faßt die biologischen Körper als dielektrisch inhomogene Körper an, verzichtet also auf die Heranziehung eines besonderen physikalischen Mechanismus zur Erklärung der anormalen Dispersion. Es unterliegt keinem Zweifel, daß die letztere mehr formale Betrachtungsweise den biologischen Verhältnissen in vielen Fällen durchaus angepaßt erscheint. So läßt sich das Verhalten einer gewissen biologisch wichtigen Gruppe kolloidaler Systeme im hochfrequenten elektrischen Feld auf dieser Grundlage verstehen (vgl. weiter unten).

Die Theorie der dielektrischen Verluste inhomogener Dielektrika in Abhängigkeit von der Frequenz wurde von K. W. Wagner¹⁾ für die Zwecke der Elektrotechnik entwickelt. Wir werden seine Ergebnisse auf die biologischen Körper ausdehnen. Da auch nach der Wagnerschen Theorie eine anormale Dispersion zu erwarten ist, wird eine Gegenüberstellung der Debyeschen und Wagnerschen Formeln von Interesse sein.

Das Ergebnis der Debyeschen Rechnung schreibt sich bekanntlich am einfachsten in der Gleichung für die komplexe DEK.²⁾:

$$(1) \quad \varepsilon = \varepsilon_{\infty} + (\varepsilon_0 - \varepsilon_{\infty}) \frac{1 - i \omega \tau'}{1 + \omega^2 \tau'^2}.$$

Dabei bedeutet:

ε : komplexe DEK,
 ε_{∞} : DEK. bei unendlicher hoher Frequenz,
 ε_0 : DEK. bei ganz langsam periodischen Feldern,

$\tau' = \frac{\varepsilon_0 + 2}{\varepsilon_{\infty} + 2} \tau$: wo τ die Relaxationszeit darstellt.

Setzt man zunächst rein formal: $\varepsilon = \varepsilon' - i \varepsilon''$, so folgt für ε' bzw. ε'' :

$$(2) \quad \varepsilon' = \varepsilon_{\infty} + \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_{\infty}}{1 + \omega^2 \tau'^2}; \quad \varepsilon'' = (\varepsilon_0 - \varepsilon_{\infty}) \frac{\omega \tau'}{1 + \omega^2 \tau'^2}.$$

Durch Einführung der Größen ε_0 und ε_{∞} fallen alle Größen aus der Theorie heraus, die an den Dipolmechanismus er-

1) K. W. Wagner, *Archiv f. Elektrotechnik* 2. S. 371. 1914; vgl. auch den Artikel von K. W. Wagner in H. Schering, *Die Isolierstoffe der Elektrotechnik*. Springer 1924.

2) DEK. bedeutet „Dielektrizitätskonstante“.

innern (z. B. das Dipolmoment). Die Definition der komplexen DEK. wird bekanntlich so getroffen, daß die Gesamtströmung (Summe aus Leitungs- und Verschiebungsstrom) sich in der Form darstellt:

$$j = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}.$$

Setzt man $\varepsilon = \varepsilon' - i\varepsilon''$, so folgt wegen $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = i\omega \mathcal{E}$:

$$j = \frac{\varepsilon'}{4\pi} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\omega}{4\pi} \varepsilon'' \mathcal{E}.$$

ε' ist also die wahre DEK. und $\lambda = \frac{\omega}{4\pi} \varepsilon''$ die Hochfrequenzleitfähigkeit. Die letzte Gleichung kann auch in die Form gebracht werden:

$$j = A \mathcal{E},$$

wo $A = \lambda + i \frac{\omega}{4\pi} \varepsilon'$ die „komplexe Leitfähigkeit“ bedeutet.

Für λ [vgl. Gl. (2)] erhält man:

$$(2a) \quad \lambda = \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty}{4\pi \tau'} \cdot \frac{\omega^2 \tau'^2}{1 + \omega^2 \tau'^2}.$$

Die Kurve $\lambda = f(\omega)$ hat kein Maximum (im Gegensatz zu ε'') und hat den in Fig. 1 dargestellten charakteristischen Verlauf.

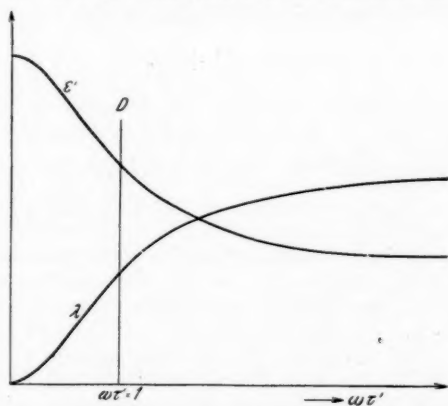


Fig. 1. DEK. und Leitfähigkeit in Abhängigkeit von der Frequenz

Die Kurve ε' stellt den Verlauf der DEK. dar. Die Lage des Dispersionsgebietes D ergibt sich aus der Bedingung

$$\omega \tau' = 1.$$

K. W. Wagner zeigte, daß man zu der Formel Gl. (1) unter sehr allgemeinen Annahmen gelangen kann. Er setzt lediglich voraus, daß die Polarisierung des betrachteten Mediums in folgende zwei Anteile gespalten werden kann:

1. einen Anteil, der sich bei Anlegen einer Gleichspannung *sofort* einstellt;
2. einen Anteil, der eine gewisse Zeit braucht, um anzulaufen.

Der zweite Anteil bewirkt eine Phasenverschiebung der Polarisierung gegenüber der Feldstärke und tritt bei hohen Frequenzen ganz zurück. Weiterhin wird das Superpositions-gesetz der dielektrischen Nachwirkungen als gültig vorausgesetzt.

K. W. Wagner stellt das Ergebnis seiner Theorie in der folgenden Form dar (mit unwesentlichen Änderungen der Bezeichnungsweise):

$$(3) \quad \epsilon' = \epsilon_{\infty} \left(1 + \frac{k}{1 + \omega^2 T^2} \right).$$

$$(4) \quad \lambda = \frac{\epsilon_{\infty} k}{4 \pi T} \frac{\omega^2 T^2}{1 + \omega^2 T^2}.$$

k bezeichnet er als „Nachwirkungskonstante“ und T als „Zeitkonstante“. Die Definition von k ergibt sich aus Gl. (3):

$$(5) \quad \epsilon_0 = \epsilon_{\infty} (1 + k).$$

Drückt man k durch ϵ_0 und ϵ_{∞} aus, so gehen die Gl. (3) und (4) genau in die Debyeschen Formeln Gl. (2) und (2a) für ϵ' und λ über (T entspricht der Größe τ).

Die physikalische Bedeutung der Definition Gl. (5) ist die folgende: ϵ_{∞} entspricht dem ersten Polarisationsanteil, der bei sehr raschen Schwingungen allein maßgebend ist und auch beim Anlegen einer Gleichspannung im *ersten Moment* wirksam ist. Die DEK. steigt dann infolge des zweiten Anteils an und hat für sehr langsam periodische Vorgänge den Wert $\epsilon_0 = \epsilon_{\infty} (1 + k)$. Die Schnelligkeit dieses Anstiegs richtet sich nach der Zeitkonstanten T . Diesem allgemeinen Rahmen fügt sich die Debyesche Theorie sehr gut ein.

Im Hinblick auf biologische Fragestellungen, insbesondere auf die Probleme der Kurzwellentherapie, ist es von grundlegender Wichtigkeit, daß die Gültigkeit der Gl. (1) nicht auf Dipolsubstanzen beschränkt ist. Es sei deshalb gestattet, die allgemeine Betrachtung K. W. Wagners mit unwesentlichen Modifikationen zu skizzieren:

Die Polarisation des Mediums wird, wie oben angenommen, in zwei Anteile zerspalten; der erste Anteil bildet sich bei Anlegung einer Gleichspannung sofort aus, der zweite möge anlaufen nach der Funktion $A \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$.

Dementsprechend erhält man für die dielektrische Verschiebung:

$$(6) \quad D(t) = \epsilon_{\infty} \mathcal{E} + A \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \mathcal{E}.$$

ϵ_{∞} ist die DEK. bei unendlich hoher Frequenz, bei der der zweite Anteil keine Rolle spielt. Setzt man in Gl. (6) $t = \infty$, so folgt:

$$D_{\infty} = (\epsilon_{\infty} + A) \mathcal{E}.$$

Wir setzen deshalb

$$A = \epsilon_{\infty} \cdot k$$

und erhalten

$$D_{t=\infty} = \epsilon_{\infty} (1 + k) \mathcal{E}.$$

Wird T Sek.¹⁾ nach dem Moment $t = 0$ das Feld um $\Delta \mathcal{E}$ erhöht, so folgt an Stelle von Gl. (6) (vgl. Fig. 2):

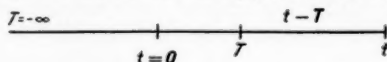


Fig. 2. Zeitachse

$$(7) \quad \begin{cases} D(t) = \epsilon_{\infty} \mathcal{E} + A \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \cdot \mathcal{E} \\ \quad + \epsilon_{\infty} \Delta \mathcal{E} + A \left(1 - e^{-\frac{t-T}{\tau}}\right) \cdot \Delta \mathcal{E}. \end{cases}$$

Gl. (7) läßt sich umschreiben (wir setzen $\mathcal{E} + \Delta \mathcal{E} = \mathcal{E}_t$):

$$D(t) = \epsilon_{\infty} (1 + k) \mathcal{E}_t - \epsilon_{\infty} k \left(\mathcal{E} e^{-\frac{t}{\tau}} + \Delta \mathcal{E} e^{-\frac{t-T}{\tau}} \right).$$

Allgemein ergibt sich für beliebig viele Feldänderungen:

$$D(t) = \epsilon_{\infty} (1 + k) \mathcal{E}_t - \epsilon_{\infty} k \sum_{T=-\infty}^{T=t} \Delta \mathcal{E} e^{-\frac{t-T}{\tau}}.$$

Wir setzen $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega T}$, so daß für $T = t$ (Gegenwart) gilt:

$$\mathcal{E}_t = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}.$$

Dann ist $\Delta \mathcal{E} = i\omega \mathcal{E}_0 e^{i\omega T} \Delta T$ und es folgt durch Ausführung der Integration:

1) T hat hier mit der Relaxationszeit der Gl. (3) und (4) nichts zu tun.

$$D(t) = \varepsilon_{\infty} (1 + k) \mathfrak{E}_t - \varepsilon_{\infty} k i \omega \mathfrak{E}_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \frac{e^{i\omega t + \frac{t}{\tau}}}{i\omega + \frac{1}{\tau}}.$$

Mit der Definition $\varepsilon_{\infty} (1 + k) = \varepsilon_0$ ergibt die weitere Ausrechnung:

$$D(t) = \mathfrak{E}_t \left(\varepsilon_{\infty} + \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_{\infty}}{1 + i\omega\tau} \right).$$

Für ε folgt die Gl. (1).

Gl. (1) muß also immer dann herauskommen, wenn die Polarisation in die oben genannten zwei Anteile gespalten werden kann, und das Superpositionsgesetz für die Polarisation erfüllt ist.

Daß die allgemeinen Annahmen (1 und 2, S. 466) auch für inhomogene Dielektrika erfüllt sind, kann man sich folgendermaßen klar machen. Das inhomogene Dielektrikum möge sich

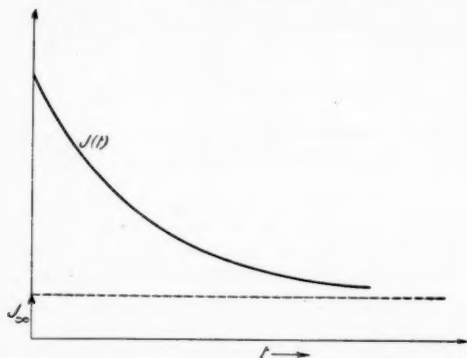


Fig. 3. Abklingender Nachwirkungsstrom

zwischen den Platten eines Kondensators befinden. Beim Anlegen einer Gleichspannung saugt das Dielektrikum infolge der Inhomogenitäten Raumladungen in sich hinein: es fließt in der Zuleitung ein „Nachwirkungsstrom“, der im allgemeinen viel länger andauert, als der Ladungsstoß (wir denken uns den Kondensator mit möglichst kleinem Zuleitungswiderstand direkt an die Spannungsquelle angeschlossen). Der Zuleitungsstrom klingt ab nach der Funktion (vgl. Fig. 3):

$$(8) \quad J(t) = J_{\infty} + A e^{-\frac{t}{T}}.$$

T ist ein Maß für die Nachwirkung und entspricht im wesentlichen der Relaxationszeit der Debyeschen Theorie. J_{∞} stellt den nach sehr langer Zeit noch übrig bleibenden Bestandteil des Stromes J dar und repräsentiert den Leitungstrom. Uns interessiert vor allem der zeitlich variable Bestandteil J_N des Nachwirkungsstromes [vgl. Gl. (8)]. Diesem Stromanteil J_N entspricht eine zeitlich variable Kapazität C , so daß $J_N(t)$ angesetzt werden kann in der Form:

$$(9) \quad J_N(t) = V \frac{dC}{dt}.$$

Aus der Gl. (9) folgt man durch Integration unter Berücksichtigung von Gl. (8), daß die DEK. (bzw. Kapazität) nicht konstant ist, sondern nach dem Gesetz ansteigt:

$$(10) \quad \epsilon = A + B \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right).$$

A hat offenbar die Bedeutung der DEK. bei unendlich hoher Frequenz [vgl. Gl. (6)] und bedeutet die statische Dielektrizitätskonstante des inhomogenen Mediums. Die sich an Gl. (6) anschließende Betrachtung, insbesondere Gl. (1), gilt also auch im Falle des inhomogenen Dielektrikums und in allen Fällen, bei denen Gl. (8) erfüllt ist.

II. Anwendung auf spezielle biologische Problemstellungen

Die meisten biologisch wichtigen Körper erfüllen in dielektrischer Beziehung die Voraussetzungen inhomogener Dielektrika im Sinne der Wagnerschen Theorie. Die Kenntnis der Dispersionsgebiete dieser Substanzen ist für die Praxis der Kurzwellentherapie von entscheidender Bedeutung. Viele scheinbar spezifische Wirkungen der Kurzwellen lassen sich mit großer Wahrscheinlichkeit darauf zurückführen, daß bei hohen Frequenzen die Dispersionsgebiete bereits überschritten sind, daß also völlig andere Werte für die Leitfähigkeit und die DEK. maßgebend sind, als im Gebiet der Langwellentherapie.

Wir geben im folgenden eine rechnerische Darstellung des von H. Schaefer an Blut gefundenen Tatsachenmaterials. Er stellte fest, daß im Wellenlängenbereich von 3—6 m die Hochfrequenzleitfähigkeit, die bei Niederfrequenz gemessene Leitfähigkeit wesentlich übertrifft. Durch Zentrifugieren des Blutes ergab sich weiter, daß an diesem Effekt in der Hauptsache die Blutkörperchen beteiligt sind, deren Hochfrequenzleitfähigkeit sich bis siebenmal größer ergab als die Niederfrequenzleitfähigkeit. H. Schaefer gab folgende Deutung der erhöhten Leitfähigkeit des Blutes bei Hochfrequenz (vgl. Fig. 4).

„In einem flüssigen Dispersionsmittel *A*, etwa wäßriger Elektrolytlösung, seien kolloidale Teilchen dispergiert, die ihrerseits wieder nicht homogen sind, sondern aus einer Membran oder sonstigen Hülle *H* bestehen, die das flüssige Innere *B* umschließt. Nehmen wir nun an, daß die elektrische Leitfähigkeit der Membran *H* sehr viel geringer ist als die der Substanzen *A* und *B*, so wird das System Dispersion der Leitfähigkeit zeigen müssen: Bei Niederfrequenz wird die Hülle *H* für den Strom undurchlässig sein; der Stromtransport wird nur durch *A* vor sich gehen. Mit steigender Frequenz wird aber der kapazitive Widerstand der Hülle kleiner

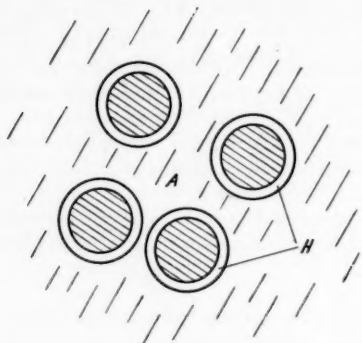


Fig. 4.

Konstitution der roten Blutkörperchen



Fig. 5.

werden: die Hülle wird kapazitiv durch den Verschiebungsstrom überbrückt; die Leitfähigkeit der inneren Substanz *B* wird in steigendem Maße an der Gesamtleitfähigkeit beteiligt sein; die Gesamtleitfähigkeit wird mit steigender Frequenz zunehmen. Bei hinreichend hohen Frequenzen ist dann schließlich der kapazitive Widerstand von *H* überhaupt zu vernachlässigen. Die Leitfähigkeit von *B* ist voll an der Gesamtleitfähigkeit beteiligt. Letztere ist also wieder frequenzunabhängig geworden.“

Es ist von Interesse, nicht nur die Leitfähigkeit, sondern auch die DEK. des kolloidalen Systems zu untersuchen. Zu diesem Zweck betrachten wir eines der Blutkörperchen, eingebettet in das Dispersionsmittel *A* (vgl. Fig. 5). Die Symmetrieebene *E, E'* trennt das Blutkörperchen in zwei Teile, die wie zwei in Serie geschaltete Kondensatoren wirken. Das Dispersionsmittel *A* übernimmt die Rolle der Außenbelegung. Die Kapazität des Systems hängt in erster Linie von der Dicke

der Hülle ab und kann bei hinreichend dünnen Hüllen H beträchtliche Werte annehmen. So erklären sich die weiter unten aus der Theorie abgeleiteten sehr großen Dielektrizitätskonstanten des kolloidalen Systems.

Die angegebene Ersatzschaltung für jedes Blutkörperchen ist indessen nur statthaft, solange die Ohmsche Komponente der Leitfähigkeit des Dispersionsmittels die kapazitive Komponente wesentlich übertrifft. Bei hohen Frequenzen überwiegt schließlich der Verschiebungsstrom, begünstigt durch die hohe DEK. des Wassers. Das Dispersionsmittel spielt dann selbst die Rolle eines Dielektrikums und darf nicht mehr als „Außenbelegung“ aufgefaßt werden. Die DEK. sinkt schließlich von ihrem anfänglich hohen Wert auf einen Betrag herab, der in der Nähe von 80 liegt (vgl. Fig. 1). Wir werden weiter unten Formeln angeben, welche die Lage des Gebietes anormal Dispersion zu berechnen gestatten.

Wie wir sahen, kann Blut als inhomogenes Dielektrikum aufgefaßt werden. Wir werden also annehmen dürfen, daß Gl. (1) die Abhängigkeit der Leitfähigkeit und der DEK. von der Frequenz richtig wiedergibt. Die Berechnung der in Gl. (1) vorkommenden Konstanten ϵ_0 und ϵ_∞ bzw. k, T wurde von K. W. Wagner¹⁾ gegeben für den Fall eines homogenen Mediums (ϵ_a, λ_a) in dem kleine *homogene* Kugeln mit anderen dielektrischen Konstanten (λ_i, ϵ_i) eingebettet sind. Für K, T findet Wagner:

$$(11) \quad k = \frac{9 p (\lambda_a \epsilon_i - \lambda_i \epsilon_a)^2}{\epsilon_\infty (2 \epsilon_a + \epsilon_i) (2 \lambda_a + \lambda_i)^2}; \quad T = \frac{2 \epsilon_a + \epsilon_i}{4 \pi (2 \lambda_a + \lambda_i)}.$$

Wir wollen die Wagnersche Rechnung modifizieren unter Zugrundelegung der oben vorausgesetzten Struktur der Blutkörperchen (vgl. Fig. 4).

Jedes Blutkörperchen verzerrt das ursprünglich homogene Feld \mathcal{E} in Richtung der z -Achse (vgl. Fig. 6) derart, als ob in seinem Mittelpunkt ein Dipol mit dem Moment m sitzen würde. Das Potential des äußeren Feldes im Punkt P (vgl. Fig. 6) stellt sich also in der Form dar:

$$(12) \quad \varphi = E \cdot z - \frac{m z}{r^3}.$$

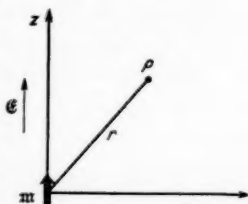


Fig. 6

1) K. W. Wagner, a. a. O.

Wir setzen:

$$(13) \quad m = \alpha \cdot E$$

und beachten, daß α evtl. als komplexe Größe zu betrachten ist. Aus den beiden letzten Gleichungen folgt:

$$(14) \quad \varphi = Ez \left(1 - \frac{\alpha}{r^3} \right).$$

Wir betrachten eine Kugel mit dem Radius R , die $N \cdot \frac{4\pi}{3} R^3$ Blutkörperchen enthalten möge. In großer Entfernung r vom Kugelmittelpunkt folgt dann für das Potential:

$$(15) \quad \varphi = Ez \left(1 - N \frac{4\pi}{3} R^3 \frac{\alpha}{r^3} \right).$$

Befindet sich andererseits eine homogene Kugel mit dem gleichen Radius R und der komplexen Leitfähigkeit A in einem homogenen Medium der komplexen Leitfähigkeit A_a , so folgt für φ (vgl. weiter unten):

$$(16) \quad \varphi = Ez \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \frac{A - A_a}{A + 2A_a} \right).$$

Die Formeln Gl. (15) und (16) werden miteinander identisch, wenn man setzt:

$$(17) \quad \frac{A - A_a}{A + 2A_a} = N \cdot \frac{4\pi}{3} \alpha.$$

Verschwinden die Realteile von A und A_a , so geht Gl. (17) in die bekannte Clausius-Mosottische Grundgleichung über:

$$\frac{\epsilon - \epsilon_a}{\epsilon + 2\epsilon_a} = N \frac{4\pi}{3} \cdot \alpha.$$

In diesem Fall ist α eine reelle Zahl. Durch Zerspaltung der komplexen Gl. (17) in zwei reelle Gleichungen, erhält man λ und ϵ als Funktionen der Frequenz, wenn α bekannt ist. Im Falle der homogenen Vollkugeln hat α den Wert [vgl. Gl. (23)]:

$$(18) \quad \alpha = R^3 \frac{A_i - A_a}{A_i + 2A_a},$$

wenn A_i die komplexe Leitfähigkeit im Innern der Kugel bedeutet.

Es muß untersucht werden, wie der Ausdruck für α unter Zugrundelegung der Struktur der Blutkörperchen abzuändern ist. Das ursprünglich homogene Feld \mathcal{E} wirke in der z -Richtung eines Koordinatensystems. Für die Potentialfunktionen im Außenraum, in der Hülle und im Innenraum jedes Blutkörperchens (vgl. Fig. 7) machen wir in bekannter Weise die Ansätze [vgl. Gl. (13)].

$$(19) \quad \begin{cases} \varphi_1 = Ez - \frac{mz}{r^3} = E \left(r - \frac{\alpha}{r^2} \right) \cos \vartheta \\ \varphi_2 = Az - \frac{Bz}{r^3} = \left(Ar - \frac{B}{r^2} \right) \cos \vartheta \\ \varphi_3 = Cz = Cr \cos \vartheta. \end{cases}$$

C hat die Bedeutung des inneren Feldes [im Raum 3 (vgl. Fig. 7)].

Die Stetigkeit des Potentials liefert die beiden Grenzbedingungen:

$$(20) \quad \begin{cases} E \left(R - \frac{\alpha}{R^2} \right) = AR - \frac{B}{R^2} \\ AR_1 - \frac{B}{R_1^2} = CR_1. \end{cases}$$

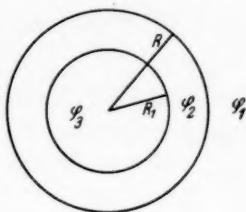


Fig. 7

Die Stetigkeit der Normalkomponenten der komplexen Stromdichte $j = A \nabla$ führt auf die Verknüpfungsrelationen:

$$(21) \quad \begin{cases} A_1 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right)_R = A_2 \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right)_R \\ A_2 \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right)_{R_1} = A_3 \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial r} \right)_{R_1} \\ A_1 E \left(1 + \frac{2\alpha}{R^3} \right) = A_2 \left(A + \frac{2B}{R^3} \right) \\ A_2 \left(A + \frac{2B}{R_1^3} \right) = A_3 C. \end{cases}$$

Die Auflösung der vier Gl. (20) und (21) nach den vier Unbekannten α, A, B, C führt unter Benutzung der Abkürzung

$$(22) \quad x = A_2 \frac{1 - 2 \left(\frac{R_1}{R} \right)^3 \frac{A_2 - A_3}{2A_2 + A_3}}{1 + \left(\frac{R_1}{R} \right)^3 \frac{A_2 - A_3}{2A_2 + A_3}}$$

zu der Lösung:

$$(23) \quad \alpha = R^3 \frac{x - A_1}{x + 2A_1}.$$

Für den Fall homogener Kugeln ($R_1 = 0$) folgt aus Gl. (22)

$$x = A_1, \text{ also } \alpha = R^3 \frac{A_1 - A_1}{A_1 + 2A_1}, \text{ womit Gl. (18) bewiesen ist.}$$

Der Vergleich der Gl. (18) und (23) zeigt, daß durch Einführung der Größe x das Problem der inhomogenen Kugeln (Blutkörperchen) auf den Fall der homogenen Kugeln zurückgeführt werden kann. x übernimmt die Rolle der

inneren (komplexen) Leitfähigkeit A_i der homogenen Kugel. Die Wagnerschen Formeln Gl. (11) für k und T können also beibehalten werden, unter Ersatz der Größe A_i durch x .

Für das Feld C im Innern jeder Kugel folgt aus Gl. (19) und (20):

$$C = 3E \frac{x}{x + 2A_1} \cdot \frac{3A_1}{A_2 \left(1 + 2\left(\frac{R_1}{R}\right)^3\right) + 2A_1 \left(1 - \left(\frac{R_1}{R}\right)^3\right)}$$

für hinreichend dünne Hüllen $\left(\frac{R_1}{R} \approx 1\right)$ und $A_1 = A_2$ folgt hieraus:

$$(24) \quad C = 3E \frac{x}{x + 2A_1}.$$

Wir wollen untersuchen, bis zu welchen Frequenzen die Hülle imstande ist, die Strömung vom Innenraum der Kugeln fernzuhalten. Zur Vereinfachung der Rechnung werden wir eine für das vorliegende Problem ausreichende Näherungsdarstellung für x geben und machen folgende *Annahmen*:

1. die Hülle habe eine gegenüber dem Durchmesser der Kugeln geringe Dicke und bestehe aus vollkommen isolierendem Material. Wir setzen also:

$$(25) \quad \vartheta = \frac{R - R_1}{R} \ll 1; \quad \lambda_2 = 0.$$

2. Die DEK. des Hüllenmaterials sei wesentlich kleiner als die DEK. der Flüssigkeit im Innern des Blutkörperchens:

$$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_3} \ll 1.$$

3. Der Quotient der Dielektrizitätskonstanten (vgl. 2.) sei größer als ϑ :

$$(26) \quad \vartheta \ll \frac{\epsilon_2}{\epsilon_3}.$$

Die Annahmen 1. und 2. bewirken, daß

$$(27) \quad \left| \frac{A_2}{A_3} \right| \ll 1$$

im gesamten Frequenzgebiet.

Denn für A_2 gelten die Darstellungen ($\lambda_2 = 0$):

$$(28) \quad \begin{cases} A_2 = i \frac{\omega}{4\pi} \epsilon_2, \\ A_3 = \lambda_3 + i \frac{\omega}{4\pi} \epsilon_3. \end{cases}$$

Die Entwicklung der rechten Seite von Gl. (22) führt wegen Gl. (27) und (25) auf die Näherungsformel:

$$(29) \quad x = A_2 \frac{1}{\frac{A_2}{A_3} + \vartheta}.$$

Die elektrischen Eigenschaften unseres Systems werden also ganz verschieden ausfallen, je nachdem ob

$$\left| \frac{A_2}{A_3} \right| \ll \vartheta \quad \text{oder} \quad \left| \frac{A_2}{A_3} \right| \gg \vartheta.$$

Der *erste* Fall liegt vor, wenn ω eine gewisse Grenzfrequenz nicht überschreitet. Es folgt dann aus Gl. (29) und (28):

$$(30) \quad x_0 = \frac{A_2}{\vartheta} = i \frac{\omega}{4\pi} \frac{\epsilon_2}{\vartheta}.$$

Der *zweite* Fall ist auf Grund der Annahme 3. unter Berücksichtigung von Gl. (28) für hinreichend hohe Frequenzen verwirklicht. Hier gilt nach Gl. (29)

$$(31) \quad x_\infty = A_3 = \lambda_3 + i \frac{\omega}{4\pi} \epsilon_3.$$

Wir sind jetzt in der Lage, für die beiden oben unterschiedenen Fälle das innere Feld C nach Gl. (24) zu berechnen. Im ersten Fall gilt $x = \frac{A_2}{\vartheta}$ [vgl. Gl. (30)] und wir erhalten unter der Annahme $A_1 = A_3$

$$(32) \quad C = 3E \frac{\frac{A_2}{\vartheta}}{\frac{A_2}{\vartheta} + 2A_1} = 3E \frac{\frac{A_2}{\vartheta}}{\frac{A_2}{\vartheta}}.$$

Dagegen folgt im zweiten Fall für sehr hohe Frequenzen aus Gl. (24), wie zu erwarten ist: $C = E$. Denn nach Gl. (30) ist dann: $x = A_3 = A_1$.

Verwendet man zur Berechnung der rechten Seite von Gl. (32) [vgl. Gl. (28)] folgende den biologischen Verhältnissen angepaßten Zahlenwerte:

$$\epsilon_2 = 2; \quad \epsilon_3 = 80; \quad \vartheta = 10^{-3}; \\ \lambda_3 = 0,01 \cdot 9 \cdot 10^{11} \text{ (Leitfähigkeit des Blutes),}$$

so ergibt sich, daß die Strömung erst in das Innere der Kugeln eindringt, wenn die benutzte Wellenlänge in das Gebiet der Kurzwellen fällt. Bei Verwendung dickerer Hüllen ($\vartheta \gg 10^{-3}$) wäre eine weitere Verminderung der Wellenlänge, also die Verwendung von Ultrakurzwellen notwendig, wenn die Hülle überbrückt werden soll.

Dieses Rechenergebnis legt den Gedanken nahe, die von verschiedenen Forschern¹⁾ beobachtete spezifische Wirkung der Kurzwellen auf Bakterien mit deren Struktur in Zusammenhang zu bringen. Befinden sich die mit Hüllen versehenen Bakterien in einer Nährflüssigkeit, so findet eine Durchströmung des Bakterieninneren erst bei sehr hohen Frequenzen statt.

Zur Berechnung der komplexen Leitfähigkeit des Blutes hat man den Wert für α [Gl. (23)] in die verallgemeinerte Clausius-Mosottische Gl. (17) einzutragen. Unter Einführung der Abkürzung $p = \frac{4\pi}{3} R^3 \cdot N$ folgt unter der Annahme $p \ll 1$

$$(33) \quad A = A_a \left(1 + 3p \frac{x - A_a}{x + 2A_a} \right),$$

wenn wir $A_i = A_a$ setzen.

A ist die gesuchte Leitfähigkeit des kolloidalen Systems. Wir setzen

$$(34) \quad x = \lambda_i + i \frac{\omega}{4\pi} \epsilon_i;$$

unter Benutzung der Abkürzungen [vgl. Gl. (11)]:

$$(35) \quad T' = \frac{2\epsilon_a + \epsilon_i}{4\pi(\lambda_a + \lambda_i)}; \quad \epsilon' = \epsilon_a \left(1 + 3p \frac{\epsilon_i - \epsilon_a}{\epsilon_i + 2\epsilon_a} \right),$$

$$(36) \quad k' = \frac{9p}{\epsilon'} \frac{(\lambda_a \epsilon_i - \lambda_i \epsilon_a)^2}{(2\epsilon_a + \epsilon_i)(2\lambda_a + \lambda_i)^2}; \quad \lambda' = \lambda_a \left(1 + 3p \frac{\lambda_i - \lambda_a}{\lambda_i + 2\lambda_a} \right)$$

liefert die Wagnersche Rechnung wie im Falle der homogenen Vollkugeln [vgl. Gl. (3) und (4)]:

$$(37) \quad \epsilon = \epsilon' \left(1 + \frac{k'}{1 + \omega^2 T'^2} \right),$$

$$(38) \quad \lambda = \lambda' + \frac{\epsilon' k'}{4\pi T'} \frac{\omega^2 T'^2}{1 + \omega^2 T'^2}.$$

Aus Gl. (37) und (38) folgt, daß für *homogene* Kugeln ϵ' bzw. λ' die Bedeutung der DEK. für unendlich hohe Frequenz bzw. der Leitfähigkeit für die Frequenz Null haben.

Damit ist allerdings unsere Aufgabe noch nicht gelöst, denn die Definitionen Gl. (22) und (34) zeigen, daß jetzt ϵ_i und λ_i also auch k' , T' , ϵ' , λ' in komplizierter Weise von der Frequenz abhängen. Nach der allgemeinen Theorie weiß man aber, daß vier Konstanten k , T , ϵ_∞ , λ_0 existieren müssen, die, in die Gl. (37) und (38) eingesetzt, die richtige Frequenzabhängigkeit der DEK. und der Leitfähigkeit ergeben. Unser Ziel muß die

1) Z. B. E. Schliephake u. W. Haase, *Strahlenther.* **40.** S. 133. 1931.

Auffindung dieser Konstanten sein. Zu diesem Zweck wenden wir uns zur Berechnung der Frequenzabhängigkeit von λ_i und ε_i . Nach Gl. (29) gilt

$$x = \frac{A_2 A_3}{A_2 + \vartheta A_3} = \lambda_i + i \frac{\omega}{4\pi} \varepsilon_i.$$

Setzt man hier die Ausdrücke für A_2 und A_3 Gl. (28) ein, so folgt nach einiger Umrechnung ($\varepsilon_{i_0} = \frac{\varepsilon_2}{\vartheta}$) [vgl. Gl. (30)]:

$$\lambda_i = \frac{\lambda_3}{\left(1 + \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_{i_0}}\right)^2} \frac{\omega^2 T''^2}{1 + \omega^2 T''^2},$$

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{i_0} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_{i_0}}} \frac{\omega^2 T''^2}{1 + \omega^2 T''^2}\right), \quad \text{wo} \quad T'' = \frac{\varepsilon_2}{4\pi \vartheta \lambda_3} \left(1 + \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_{i_0}}\right)$$

gesetzt ist. Nach Annahme 3. ist $\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} \vartheta \ll 1$, so daß das Gleichungssystem übergeht in

$$(39) \quad \begin{cases} \lambda_i = \lambda_3 \frac{\omega^2 T''^2}{1 + \omega^2 T''^2}, \\ \varepsilon_i = \frac{\varepsilon_{i_0}}{1 + \omega^2 T''^2} + \varepsilon_3 \frac{\omega^2 T''^2}{1 + \omega^2 T''^2}; \quad T'' = \frac{\varepsilon_2}{4\pi \vartheta \lambda_3}. \end{cases}$$

Hieraus folgt in Übereinstimmung mit den Gl. (30) und (31)

$$\lambda_{i_0} = 0, \quad \lambda_{i_\infty} = \lambda_3, \quad \varepsilon_{i_0} = \frac{\varepsilon_3}{\vartheta}, \quad \varepsilon_{i_\infty} = \varepsilon_3.$$

Mit Hilfe der letzten Formeln lassen sich die gesuchten Konstanten k und T folgendermaßen bestimmen: wir denken uns die Werte Gl. (39) für λ_i und ε_i in die Gl. (37) und (38) unter Berücksichtigung der Gl. (35) und (36) eingetragen. Dann muß sich ε und λ auf die Form bringen lassen [vgl. Gl. (3) und (4)]:

$$(40) \quad \varepsilon = \varepsilon_\infty \left(1 + \frac{k}{1 + \omega^2 T^2}\right), \quad \lambda = \lambda_0 + \frac{\varepsilon_\infty k}{4\pi T} \frac{\omega^2 T^2}{1 + \omega^2 T^2},$$

wo jetzt $\varepsilon_\infty, \lambda_0, k, T$ vier Konstanten sind. Im Gebiet großer bzw. kleiner Frequenzen folgt also für ε bzw. λ

$$(41) \quad \varepsilon = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_\infty k}{T^2} \frac{1}{\omega^2} + \dots; \quad \lambda = \lambda_0 + \frac{\varepsilon_\infty k T}{4\pi} \omega^2 + \dots$$

Analog erhält man aus den Gl. (37) und (38)

$$(42) \quad \varepsilon = \varepsilon'_\infty + \frac{\varepsilon'_\infty k'_0}{T'^2_0} \cdot \frac{1}{\omega^2} + \dots; \quad \lambda = \lambda'_0 + \frac{\varepsilon'_0 k'_0 T'_0}{4\pi} \omega^2 + \dots$$

Die Indizes geben die Frequenzwerte an, für die die betreffenden Größen genommen sind. Gl. (42) geht in Gl. (41) über, wenn man in Gl. (42) ε'_∞ bzw. λ'_0 auf die asymptotische Form bringt:

$$(43) \quad \begin{cases} \varepsilon'_\infty = \varepsilon_\infty + \frac{K_1}{\omega^2} + \dots, \\ \lambda'_0 = \lambda_0 + K_2 \cdot \omega^2 + \dots \end{cases}$$

und die Koeffizienten von $1/\omega^2$ bzw. von ω^2 zusammenzieht. Der Vergleich der Gl. (41) und (42) liefert dann:

$$(44) \quad \begin{cases} \frac{\varepsilon_\infty k}{T^2} = K_1 + \frac{\varepsilon'_\infty k'_\infty}{T'^2_\infty}, \\ \frac{\varepsilon_\infty k T}{4\pi} = K_2 + \frac{\varepsilon'_0 k'_0 T'_0}{4\pi}, \end{cases}$$

durch Division folgt daraus:

$$(45) \quad T = \sqrt[3]{\frac{4\pi K_2 + \varepsilon'_0 k'_0 T'_0}{K_1 + \frac{\varepsilon'_\infty k'_\infty}{T'^2_\infty}}}; \quad k = \frac{T^2}{\varepsilon_\infty} \left(K_1 + \frac{\varepsilon'_\infty k'_\infty}{T'^2_\infty} \right).$$

Zur Bestimmung der Konstanten K_1 und K_2 setzen wir in die Gl. (35) und (36) die Werte Gl. (39) für ε_i und λ_i ein und erhalten durch eine einfache Rechnung die Entwicklungen ($\lambda_2 = 0$)

$$(46) \quad \begin{cases} \varepsilon'_\infty = \varepsilon_a \left(1 + 3p \frac{\varepsilon_a - \varepsilon_a}{\varepsilon_a + 2\varepsilon_a} \right) + \frac{\varepsilon_{i_0}}{3\varepsilon_a T'^2} \left(\frac{3\varepsilon_a}{2\varepsilon_a + \varepsilon_3} \right)^2 \cdot \frac{1}{\omega^2} + \dots \\ \lambda'_0 = \lambda_a \left(1 - \frac{3}{2} p \right) + \frac{9}{64\pi^2} \frac{p}{\lambda_a} \left(\frac{\varepsilon_3}{\vartheta} \right)^2 \cdot \omega^2 + \dots \end{cases}$$

Der Vergleich mit Gl. (43) liefert die Werte für ε_∞ , λ_0 , K_1 , K_2 . Als weitere vereinfachende Annahme soll wie auf S. 474 gesetzt werden:

$$\lambda_a = \lambda_3; \quad \varepsilon_a = \varepsilon_3.$$

Dann folgt aus Gl. (35) und (36)

$$(47) \quad \begin{cases} T'_0 = \frac{2\varepsilon_a + \varepsilon_{i_0}}{8\pi \lambda_a}, & T'_\infty = \frac{2\varepsilon_a + \varepsilon_3}{4\pi (2\lambda_a + \lambda_3)}, \\ k'_0 = \frac{9p}{\varepsilon'_0} \cdot \frac{(\lambda_a \varepsilon_{i_0})^2}{(2\varepsilon_a + \varepsilon_{i_0}) \cdot 4\lambda_a^2}, & k'_\infty = 0. \end{cases}$$

Unter Berücksichtigung der Gl. (45), (43), (46) folgt also

$$(48) \quad \begin{cases} T = \frac{3}{8\pi} \frac{\varepsilon_3}{\lambda_3} \frac{R}{\Delta R} = \frac{3}{2} T'' \quad [\text{vgl. Gl. (39)}], \\ k = \frac{9}{4} p \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_3} \frac{R}{\Delta R}. \end{cases}$$

Ein Zahlenbeispiel soll uns die Bedeutung der abgeleiteten Formeln erläutern. Wir setzen:

$$\vartheta = \frac{JR}{R} = 10^{-3}; \quad \epsilon_3 = 80; \quad \lambda_3 = 0,01 \cdot 9 \cdot 10^{11};$$

$$\epsilon_2 = 2; \quad p = \frac{1}{9}.$$

Dann folgt

$$T = \frac{3}{8\pi} \frac{2}{10^{11}} \cdot 10^3; \quad k = \frac{1}{4} \frac{2}{80} 10^3 = 6,25.$$

Das Dispersionsgebiet ($\omega T = 1$ vgl. S. 465) liegt also bei $\lambda = 45$ m in Übereinstimmung mit der auf S. 475 vorgenommenen Abschätzung. Für die DEK. bei langsam periodischen Vorgängen folgt nach Gl. (40)

$$\epsilon_0 = \epsilon_\infty (1 + k) = 80 \cdot 7,25 = 580.$$

Solch hohe Dielektrizitätskonstanten sind nach dem auf S. 471 Gesagten durchaus zu erwarten.

Nachdem H. Schaefer im Wellengebiet 3—6 m eine erhöhte Hochfrequenzleitfähigkeit für Blut gefunden hatte, wurden in Fortführung dieser Untersuchungen Messungen vorgenommen, um die Lage des Dispersionsgebietes genau festzustellen, sowohl nach der Seite der längeren (F. Graul), als auch kürzeren Wellenlängen (H. Dänzer). Die bisher vorliegenden Resultate der Messungen im Wellenlängengebiet 63 cm bis 14 m zeigen, daß hier keine Wellenlängenabhängigkeit der Hochfrequenzleitfähigkeit vorhanden ist. Es ist also zu erwarten, daß das Dispersionsgebiet bei längeren Wellen liegt. Über die Meßresultate soll jedoch an anderer Stelle berichtet werden.

Ein weiteres Modell eines biologisch wichtigen Dielektrikums ist in Fig. 8 abgebildet. Sind die mit 1 bezeichneten Schichten dünne, mehr oder weniger gut leitende Membranen, so verhält sich ein solches Dielektrikum in dielektrischer Beziehung ähnlich wie ein Zellengewebe. Nach K. W. Wagner ergeben sich für das inhomogene Dielektrikum Fig. 8 folgende Gleichungen für k und T , wenn man die Summe aller mit 1 bzw. mit 2 bezeichneten Schichtdicken gleich $p_1 \cdot d$ bzw. $p_2 \cdot d$ setzt:

$$(49) \quad T = \frac{1}{4\pi} \frac{\epsilon_1 p_2 + \epsilon_2 p_1}{\lambda_1 p_2 + \lambda_2 p_1}; \quad k = \frac{1}{p_1 p_2} \frac{\epsilon_1 \lambda_2 - \epsilon_2 \lambda_1}{\left(\frac{\lambda_1}{p_1} + \frac{\lambda_2}{p_2}\right)^2 \epsilon_1 \cdot \epsilon_2}.$$

Auch hier führen Zahlenwerte, die den biologischen Verhältnissen angepaßt sind, ins Gebiet der Kurzwellen, wenn man nach der Lage der Dispersionsstelle fragt.

Zum Schluß sei noch erwähnt, daß die Formeln Gl. (49) auch die Theorie der von Schliephake therapeutisch verwandten Methode der Durchflutung im Kondensatorfeld enthalten (vgl. Fig. 9), denn die Anordnung Fig. 9 läßt sich als geschichtetes Dielektrikum auffassen. Die Wärmeentwicklung steigt also bei

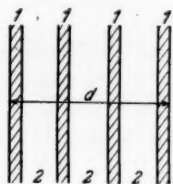


Fig. 8. Geschichtetes Dielektrikum

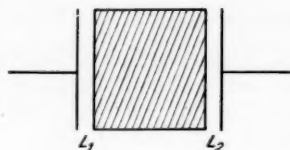


Fig. 9. Schema der Kondensatorfeldmethode

festgehaltener Spannung zwischen den Elektroden nach Maßgabe einer Debye-Wagnerschen Kurve $\frac{\omega^2 T^2}{1 + \omega^2 T^2}$ an. Die Dispersionsstelle errechnet sich aus Gl. (49).

Setzt man für k , T praktisch in Betracht kommende Werte an, so folgen in der Tat für die kritische Wellenlänge Werte des Kurzwellenbereiches. Die Methode des Kondensatorfeldes läßt sich also zweckmäßigerweise, wie ja die Erfahrung auch zeigt, nur bei Kurzwellen anwenden.

Diese Untersuchung wurde durchgeführt im Rahmen der mit Unterstützung der Notgemeinschaft auf Anregung und unter Leitung von Herrn Priv.-Doz. Dr. Rajewsky unternommenen Untersuchungen über das Verhalten biologischer Substanzen bei Hochfrequenz. Der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft, die mir die Durchführung dieser Arbeit durch Gewährung eines Stipendiums ermöglichte, spreche ich meinen verbindlichsten Dank aus. Ebenso danke ich Herrn Priv.-Doz. Dr. Rajewsky für sein stetes Interesse, das er dieser Arbeit entgegengebracht hat.

Frankfurt a. M., Institut für physikalische Grundlagen der Medizin an der Universität, Mai 1934.

(Eingegangen 14. Juni 1934)

**Die Dispersion des Phasensprungs
bei der Lichtreflexion an dünnen Metallschichten**

Von Jürgen Bauer

(Mit 15 Figuren)

I. Einleitung

Die Erscheinung, daß der Phasensprung bei der Reflexion von Licht an dünnen Metallschichten von der Wellenlänge des Lichtes abhängt, ist lange bekannt. Sie mußte zu Tage treten, als man daranging, mit Interferenzmethoden die Dicke der Schichten zu bestimmen, wie dies z. B. für direkte Absorptionsmessungen notwendig ist¹⁾. Doch blieb das Interesse an dieser Erscheinung so lange auf den Kreis derer, die sich speziell mit Metalloptik beschäftigten, beschränkt, bis im Interferometer von Perot und Fabry der meistverwendete Apparat für interferometrische Wellenlängenmessungen aufkam, bei dem die Dispersion des Phasensprungs berücksichtigt werden muß. Das geschah seitens Fabry und Buisson²⁾ nach zwei Methoden. Die eine, die Planparallelitätsmethode, besteht darin, daß man die gesuchte Wellenlänge bei verschiedenen Distanzen mißt und aus dem dabei auftretenden Gang der so erhaltenen Wellenlängenwerte auf den Phasensprung schließt. Bei der zweiten Methode („Keilmethode“) stellt man die Interferometerplatten so zusammen, daß die Spiegelflächen einen „versilberten Luftkeil“ bilden und mißt die entstehenden Interferenzstreifen gleicher Dicke in Nachbarschaft einer Marke, welche in eine der beiden Silberschichten eingeritzt wird, aus. Diese Methode³⁾ wurde als die bequemere in vorliegender Untersuchung verwendet. Sie unterscheidet sich von der anderen dadurch, daß bei ihr nur eine kleine Stelle der Schichten zur Untersuchung gelangt, während bei jener der ganze Querschnitt der Schicht

1) O. Wiener, Über die Phasenänderung des Lichtes bei der Reflexion und Methoden der Dickenbestimmung dünner Blättchen. Wied. Ann. 31. S. 629. 1887.

2) H. Buisson u. Ch. Fabry, Journ. d. Phys. [4] 7. S. 417. 1908.

3) Vgl. auch P. Eversheim, Ann. d. Phys. [4] 30. S. 815. 1909.

mitwirkt¹⁾. Bei Verwendung möglichst planer Flächen und gleichförmiger Metallschichten sind die beiden Methoden zweifellos gleichwertig. Da diese Voraussetzung in der vorliegenden Arbeit erfüllt war, stand der Anwendung des Keilverfahrens nichts im Wege.

Das Ziel der vorliegenden Untersuchung war, die Dispersion des Phasensprungs an verschiedenen Metallen im sichtbaren Gebiet zu untersuchen und wenn möglich mit den metalloptischen Konstanten in Verbindung zu bringen.

II. Herstellung der Schichten

Die Herstellung der Metallschichten wurde nach den beiden heute gebräuchlichen Verfahren vorgenommen: Kathodenzerstäubung und Verdampfung im Vakuum, bei Platin nur durch Kathodenzerstäubung. Die Zerstäubung von Gold und Silber erfolgte in einer Glasglocke, in der als Kathode eine Platte des zu zerstäubenden Metalls eingehängt war. Die Glocke saß, durch Hahnfett gedichtet, mit dem geschliffenen Rande auf einem planen, fein abgedrehten Eisenteller, der als Anode diente. Der Durchmesser der Glocke betrug 21 cm, als Silberkathode stand eine runde Scheibe von etwa 11 cm Durchmesser und 1 mm Dicke zur Verfügung. Da diese Fläche groß ist gegen die der zu bestäubenden Interferometerplatten²⁾, so war also von den Silberschichten zu erwarten, daß sie ziemlich homogen ausfallen würden. Als Goldkathode stand ein quadratisches Blech $50 \times 50 \times 0,2$ mm chemisch reinen Goldes zur Verfügung, das von der Gold- und Silberscheideanstalt, Frankfurt a. M. bezogen wurde. Die zu bestäubenden Platten lagen auf einem Glastischchen; ihre Oberfläche war von der Kathode etwa 8 cm entfernt. Der Gasdruck wurde, wie durch Rother und Lauch³⁾ vorgeschlagen, so reguliert, daß der Kathodendunkelraum dicht über der zu bestäubenden Oberfläche abschloß. Die Zerstäubung erfolgte in Luft, bei Platin jedoch in der von Schuch⁴⁾ benutzten Apparatur, wie dort angegeben, in Stickstoff.

Die Verdampfung von Gold und Silber erfolgte im Hochvakuum. Das Metall wurde in einem wannenförmig gebogenen, elektrisch geglühten Tantalblechstreifen zur Sublimation gebracht. Die Quarzlampen wurden durch einen Schliff eingeführt und in einem Halter, die zu bestäubende Fläche nach unten gerichtet, über das Tantalblech gehängt.

1) K. W. Meißner, *Ann. d. Phys.* [4] **51**, S. 95. 1916; dort S. 108.

2) Vgl. u. S. 483.

3) F. Rother und K. Lauch, *Phys. Ztschr.* **24**, S. 426. 1923.

4) R. Schuch, *Ann. d. Phys.* [5] **13**, S. 299. 1932.

Als Unterlage der Schichten diene durchgehend ein Paar kristalliner Quarzplatten (Zeiss, Jena), die hohen Anforderungen an Planheit genügen. Die schwach keilförmigen Platten (Keilwinkel $20'$) hatten eine Dicke von 10,5 mm und einen Durchmesser von 30 mm. Die Reinigung der Platten erfolgte durch Behandlung mit Salpetersäure bzw. Königswasser und darauf folgendes gründliches Spülen mit fließendem Wasser sowie Auskochen in destilliertem Wasser. Zur Entfernung von Fett bewährte sich vorsichtiges, aber gründliches Abseifen vor dem Auskochen. Unmittelbar vor der Bestäubung empfahl es sich, die so gereinigte Oberfläche mit Zellstoffwatte energisch abzureiben. Diese Reinigungsmethoden erwiesen sich bei möglichster Schonung der Platten als vorteilhaft.

III. Die Meßmethode

Während bei der Planparallelitätsmethode (vgl. Einleitung) die Lichtquelle auf den Spalt des Dispersionsapparates abgebildet und die im Unendlichen lokalisierte Interferenzerscheinung gleicher Neigung (Lummer-Haidinger-Mascartsche Ringe) beobachtet wird, bildet man bei der Keilmethode den dünnen Luftkeil und die dort entstehenden Interferenzstreifen gleicher Dicke auf den Spalt des Dispersionsapparates ab. Wie aus der elementaren Theorie der Newtonschen Ringe bekannt ist, kommt, wenn wir eine homogene ebene Welle der Wellenlänge λ senkrecht auf eine dünne Schicht fallen lassen, maximale Helligkeit dort zustande, wo die Dicke d der Schicht ein Vielfaches von $\lambda/2$ beträgt. Das ergibt bei unserer keilförmigen Luftschicht (Keilwinkel Φ) ein System geradliniger äquidistanter Streifen, welche der Keilkante parallel laufen. (Durch mehrfache Reflexion wird nur ihre Schärfe vermehrt, ihre Lage nicht geändert.) Der Abstand zwischen zwei Streifen beträgt

$$(1) \quad s = \frac{\lambda}{2 \sin \Phi}.$$

Denken wir uns die Keilflächen fortgesetzt, bis sie in der Keilkante zusammenstoßen, so nennen wir den Streifen, welcher als erster auf die Keilkante folgt, „Streifen erster Ordnung“, den nächstfolgenden „Streifen zweiter Ordnung“ usw.; die Keilkante selbst ist demnach als Ort des „Streifens nullter Ordnung“ anzusehen. Die Quarzplatten befinden sich in einem Etalongeäuse nach Fabry und Perot in der Hilgerschen Form. Der Luftkeil im Interferometer (Fig. 1) wird dadurch hergestellt, daß man die Spiegelflächen am Rande durch drei Glimmerscheibchen G trennt, von denen zwei gleich dick sind, während

das dritte in der Dicke etwas abweicht. Die Keilkante und mit ihr das Streifensystem wird erstens durch die Anordnung dieser Glimmerscheibchen, zweitens durch entsprechendes Anspannen von drei Federn F senkrecht zum Spalt des Dispersionsapparates gestellt.

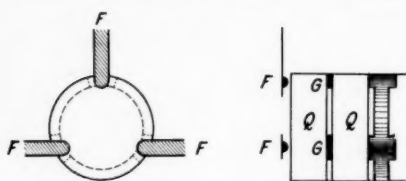


Fig. 1. Zusammensetzung des Luftkeils

Dieser hat die Aufgabe, die Interferenzerscheinung nach Wellenlängen räumlich zu trennen. Wir erhalten also, wenn die Lichtquelle homogene Wellen sendet, nebeneinander die Bilder des breiten Spaltes in den verschiedenen Farben und darin jeweils das Interferenzstreifensystem der betreffenden Wellenlänge. Wie Gl. (1) lehrt, liegen die Streifen um so enger, je kürzer die Wellenlänge ist (Fig. 2).

Verwenden wir dagegen eine kontinuierliche Lichtquelle, so ergibt sich unter den gleichen Bedingungen ein unreines,

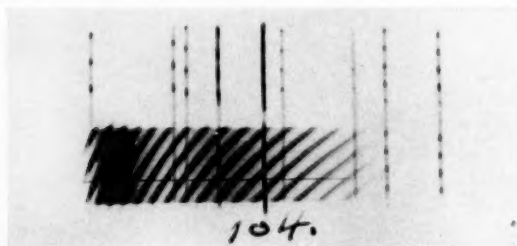


Fig. 2

kanneliertes Spektrum. Legen wir dasselbe photographisch über das beschriebene Spektrum diskreter Wellenlängen, so fallen dort, wo eine Linie liegt, die Streifen des kannelierten Spektrums auf die Streifen in der Linie. Sie sind geradlinig oder gekrümmt, je nachdem man einen Gitter- bzw. einen Prismenapparat verwendet. Für vorliegende Arbeit diente ein kleiner Spektrograph mit Rutherford-Prisma zur Zerlegung. Die Fig. 2 gibt ein Photogramm wieder.

Das Wesen der verwendeten Methode besteht nun darin, für verschiedene diskrete Wellenlängen die scheinbare Dicke

des Luftkeils an einer scharf definierten Stelle zu bestimmen. Diese Stelle wird durch einen feinen, mit einer Aluminiumnadel in eine der beiden Silberschichten eingeritzten Strich (Marke m) bezeichnet, der parallel zum Streifensystem, also ebenfalls senkrecht zum Spalt verläuft. Sind in einer Linie λ_i die der Marke m benachbarten Streifen durch die einstweilen noch unbekannten Ordnungszahlen n und $n+1$ gekennzeichnet, ist ferner s_i der Abstand dieser Streifen und r_i der Abstand der Marke von Streifen n^{ter} Ordnung, und setzen wir $\frac{r_i}{s_i} = q_i$, so wird die optische Dicke des Luftkeils an der Stelle m , wenn wir vom Phasensprung absehen, durch die Beziehung $2d = (n + q_i) \lambda_i$ gegeben. In Wirklichkeit ist aber der von λ_i abhängige Phasensprung ε_i zu berücksichtigen, und daher obige Gleichung abzuändern in $2d = (n + q_i + \varepsilon_i) \lambda_i$. Wir sehen also, daß sich die Abhängigkeit des Phasensprungs ε_i von λ_i ausprägt in einer Abhängigkeit der scheinbaren optischen Dicke von der Wellenlänge. Diese ist es darum, welche wir, dem Vorbilde von Fabry und Buisson folgend, in unseren Kurven in Abhängigkeit von λ darstellen. Wir tragen also als Abszisse die Wellenlänge λ , als Ordinate den Unterschied Δd der optischen Dicke d gegen die bei einer willkürlich gewählten Vergleichswellenlänge bestehende Dicke d auf. (Meist wurde Helium 5875 als solche genommen): Es handelt sich also nur um eine relative, nicht um eine absolute Messung des Phasensprungs.

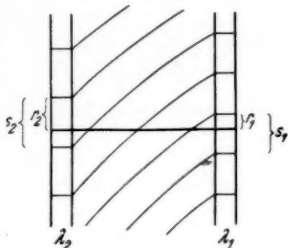


Fig. 3

Es erübrigt noch die Ordnungszahl n zu bestimmen, wozu die Aufnahme Fig. 2, schematisch dargestellt in Fig. 3, dient, deren Herstellung wir bereits besprochen haben.

Bedeutend λ_1 und λ_2 ; ($\lambda_2 > \lambda_1$) die Wellenlängen zweier herausgegriffener Linien, so gilt, vom Phasensprung wiederum abgesehen:

$$2d = (n + q_2) \lambda_2 = (n + p + q_1) \lambda_1$$

$$(2) \quad n = \frac{(p + q_1) \lambda_1 - q_2 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Hierbei bedeutet p die abzuzählende Streifenzahl, welche den der Marke m bei λ_1 und den ihr bei λ_2 nächstuntergeordneten

Streifen unterscheidet, (in der Fig. 3 ist $p = 3$), während die anderen Zeichen die erklärte Bedeutung haben.

Als Wellenlängen kamen nur bereits genau gemessene zur Verwendung; doch genügt, wenn man bei geringen Ordnungszahlen arbeitet, eine Genauigkeit der Wellenlängenwerte von 0,1 ÅE. Die Ordnungszahlen lagen meist unter 100. Die Messung der r_i und s_i erfolgte mit einem Abbeschen Komparator. Damit ist aus Gl. (2) die Ordnungszahl n bestimmt.

Die Meßgenauigkeit ist sehr abhängig von der Schärfe der Interferenzen, d. h. vom Reflexionsvermögen der Metallschicht. Bei hochreflektierenden Silberschichten konnte die Ordnungszahl an der Stelle m bis auf weniger als 0,001 genau bestimmt werden, während bei minder gut reflektierenden Schichten die auf verschiedenen Komparatormessungen beruhenden n -Werte bis zu 0,005 schwankten; der Streuungsgrad der Meßpunkte in den betreffenden Kurven zeigt dies anschaulich.

IV. Optische Anordnung und Justierung

Die optische Anordnung wird durch Fig. 4 gezeigt und unterscheidet sich von der bei Fabry und Buisson¹⁾ be-

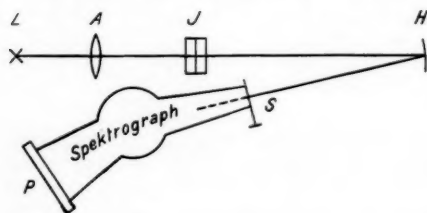


Fig. 4

schrieben nur dadurch, daß die im Luftkeil J lokalisierte Interferenzerscheinung statt wie dort mit einem photographischen Objektiv, hier mit einem oberflächenversilberten Hohlspiegel der Brennweite 26 cm auf den

Spalt des Dispersionsapparates abgebildet wurde, wodurch man chromatische Fehler vermied. Die Justierung²⁾ (Fig. 4) erfolgte von der Kameraseite her, d. h. es wurde an die Stelle P der photographischen Platte, dort, wo das Gelbgrüne erscheint, ein 4-Volt-Lämpchen angebracht, so daß aus dem weit geöffneten Spalt S ein schwach divergentes, hellgrünes Lichtbündel austrat. Nun wurde der Hohlspiegel H so geneigt, daß er, normal zur Richtung HS gestellt, das Lichtbündel in sich selbst zurückwarf, was am Spalt kontrolliert wurde. Hohlspiegel H , Interferometer J und

1) Ch. Fabry u. H. Buisson, a. a. O.

2) Vgl. K. W. Meißner, Ann. d. Phys. [4] 51. S. 95. 1916; dort S. 99.

Achromat A waren auf einer optischen Bank mit Reitern montiert, jeweils um die senkrechte Achse drehbar. Nun wurde H so gedreht, daß der hellgrüne Fleck bezüglich rechts und links in die Mitte von A fiel. A wurde in der Höhe so eingestellt, daß der grüne Fleck in der Mitte auch hinsichtlich oben und unten saß. Nun wurde die Lichtquelle L so angebracht, daß sie a) in der Brennebene von A lag, b) daß das von L ausgehende Lichtbündel längs AH wie auch längs HS zentral zu dem von S austretenden grünen verlief, welches mit einem längs AH und HS verschobenen durchscheinenden Papierblättchen leicht nachzuprüfen war. Jetzt endlich wurde das Interferometer J eingesetzt und erstens mittels Stellschrauben so geneigt, daß das grüne Lichtbündel an der Metallschicht genau in sich zurückgeworfen wurde, zweitens längs der optischen Bank so lange verschoben, bis die in die eine Metallschicht geritzte Marke m gleichzeitig mit einem quer zum Spalt angebrachten Glasfaden scharf abgebildet wurde. Als Lichtquelle L diente je nach Bedarf die Kapillare einer Helium-, Neon- oder Argonröhre in „end on“ Stellung.

V. Versuchsergebnisse

1. Silber

wurde bereits von Fabry und Buisson¹⁾ eingehend untersucht. Sie stellten Ag-Schichten *chemisch* und durch *Kathodenzerstäubung* her, und ihr bemerkenswertes Ergebnis war, daß zwar die chemischen Versilberungen stets denselben Kurventypus, einen steilen Anstieg der optischen Dicke nach dem Violetten zu ergaben, daß aber bei Kathodenzerstäubung außer diesem Verlauf auch ein davon entschieden abweichender annähernd horizontaler auftrat, so daß sie sich genötigt sahen, zwei verschiedene Modifikationen des Silbers anzunehmen. In vorliegender Untersuchung wurden durch Zerstäubung nur Schichten vom steilen Kurventypus erhalten, wie ihn Fig. 5 zeigt.

Da Silber bei $0,32 \mu$ ein Minimum der Absorption und Reflexion besitzt, so macht sich hier ein Zusammenhang des Phasensprungs mit diesen Eigenschaften bemerkbar, wie auch Fabry und Buisson bereits erkannten. *Es wächst die optische Dicke mit fallendem Reflexions- und Absorptionsvermögen.*

Fig. 6 zeigt die Kurven, welche an zwei übereinander angebrachten Marken m_1 und m_2 einer kathodenzerstäubten, hochreflektierenden, homogenen Schicht aufgenommen wurden, Fig. 7

1) Ch. Fabry und H. Buisson, a. a. O.

dasselbe an einer vakuumverdampften Schicht, welche ebenfalls hochreflektierend und ziemlich, wenn auch nicht ebenso gleich-

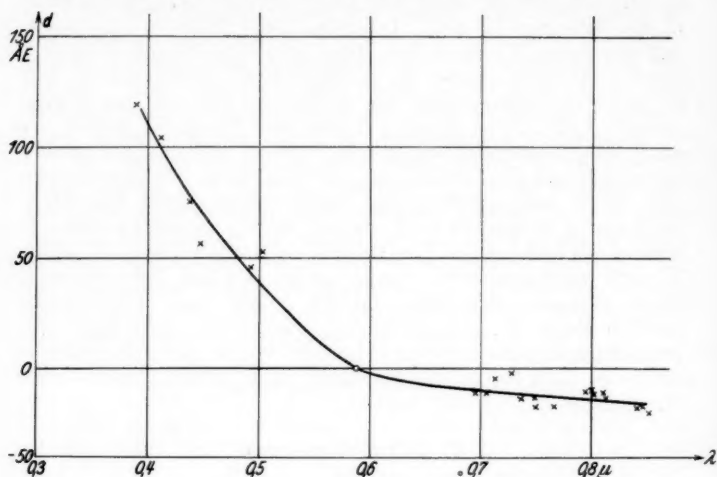


Fig. 5. Silber, kathodenzerstäubt

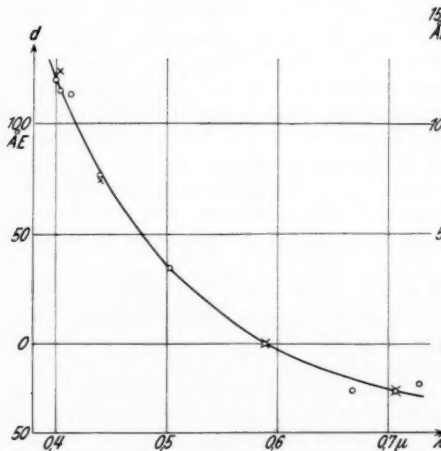


Fig. 6.
Silberschichten, kathodenzerstäubt.
An zwei Stellen m_1 und m_2 untersucht. \times Verlauf bei m_1 ; \circ Verlauf bei m_2

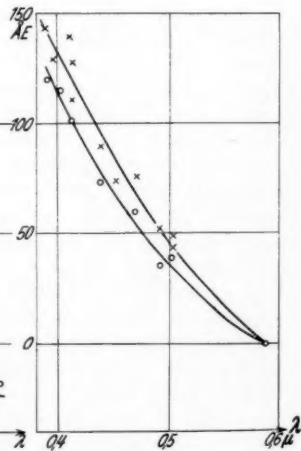


Fig. 7.
Silberschichten, verdampft.
An zwei Stellen m_1 und m_2 untersucht. \times Verlauf bei m_1 ; \circ Verlauf bei m_2

mäßig ausgefallen war. Bei der kathodenzerstäubten Schicht fallen beide Kurven zusammen, während sie bei der vakuumverdampften Schicht wenig, aber merklich von einander abweichen. Es bestätigt sich also einerseits die auf S. 482 ausgesprochene Erwartung, durch Kathodenzerstäubung recht homogene Silberschichten zu erhalten, andererseits aber auch die dort angeführten Bedenken dagegen, das Verhalten der Schicht an einer Stelle ohne weiteres für das der ganzen zu nehmen.

Während der Untersuchung erschien die Arbeit von Ritschl¹⁾, worin vakuumverdampfte Silber Spiegel von geringem Reflexionsvermögen durch vorsichtiges Behandeln mit Königswasserdämpfen in hochreflektierende umgewandelt wurden. Ritschl stellt als

mögliche Deutung die auf, daß durch Oberflächenreaktionen (Bildung von Silber-salzen) lokale Wärme entwickelt und dadurch eine Umkristallisation der ganzen Schicht eingeleitet werde. Man kann sich diesen Vorgang so vorstellen, daß ursprünglich ein regellooses Nebeneinander von kleinen und kleinsten Kristallen vorliegt, welchen durch die plötzliche Erwärmung Gelegenheit zu einer der Unterlage folgenden Zusammenschließung gegeben wird.

Nun erhob sich die Frage, ob die beiden Ritschlschen Modifikationen identisch sind mit den von Fabry und Buisson gefundenen. Es wurden deshalb vakuumverdampfte Silber Spiegel hergestellt, welche erstens ein weit geringeres Reflexionsvermögen als die zerstäubten besaßen, zweitens einen nur schwach ansteigenden Kurvenverlauf aufwiesen. Wurden sie nun der Ritschlschen Prozedur unterworfen, so bestätigte

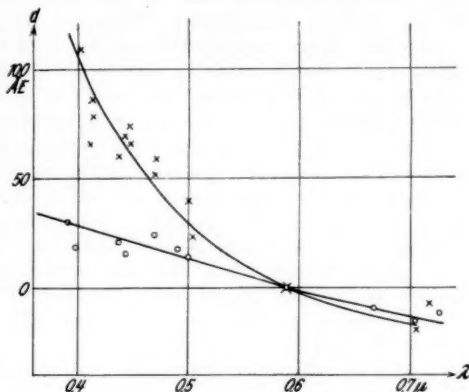


Fig. 8. Silber, verdampft.
 \circ Verlauf vor, \times Verlauf nach Behandlung
 mit Königswasserdämpfen

1) R. Ritschl, Ztschr. f. Phys. 69. S. 578. 1931.

sich erstens die große Erhöhung des Reflexionsvermögens (schärfere Interferenzen!), zweitens glich nun die Kurve der optischen Dicke vollkommen denen der zerstäubten Spiegel (Fig. 8). Dieser Versuch, der zweimal mit dem gleichen Ergebnis angestellt wurde, bejahte die oben aufgeworfene Frage. Zwar verlaufen die flachen Kurven bei Fabry und Buisson fallend, hier steigend nach kürzeren Wellenlängen; doch läßt sich dies so erklären, daß bei uns das Silber schon teilweise in der anderen Modifikation beigemischt ist. Der Versuch läßt ferner die Ritschlsche Deutung plausibel erscheinen: Scheint doch durch die Behandlung eine optisch wahrnehmbare Eigenschwingung zu entstehen, was mit der Annahme, ein kristallischer Zustand werde erzeugt, gut zusammenstimmt.

Bemerkenswert ist, daß durch Verdampfung auch gelegentlich ein Spiegelpaar erhalten wurde, welches, von vornherein hochreflektierend und prachtvolle Interferenzen bildend, sofort ohne Behandlung den steilen Kurvenverlauf zeigte. Das entspricht wohl folgendem Befund von Ritschl¹⁾:

„Gute Spiegel sind von vornherein und im Endresultat besser als in den angeführten Beispielen; die Steigerung ist dann prozentual nicht so groß, doch läßt sich jeder Spiegel durch die Behandlung verbessern.“

Die von Fabry und Buisson nicht gelöste Frage, welcher Umstand denn für die Entstehung der einen oder der anderen Modifikation entscheide, wurde auch hier nicht behandelt; doch läßt sich nach dem Gesagten erwarten, daß dafür der Wärme-

zustand a) des Silberdampfes, b) der auffangenden Platte maßgebend sein möchte.

2. Platin

Dieses bestätigt, wie ein Vergleich von Fig. 9 etwa mit

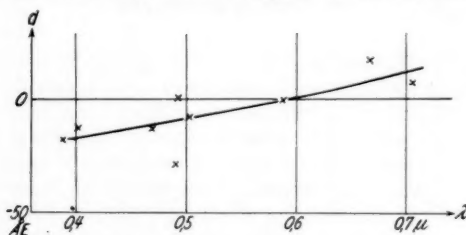


Fig. 9. Platin

den Schuchschen²⁾ Absorptionskurven lehrt, die bei Silber aufgestellte Regel: Die optische Dicke wächst mit fallendem Reflexions- und Absorptionsvermögen.

1) R. Ritschl, a. a. O. S. 582.

2) E. Schuch, Ann. d. Phys. [5] 13. S. 299. 1932.

3. Gold

Die Untersuchung von Gold war hinsichtlich des Zusammenhangs zwischen Phasensprung und Absorption besonders inter-

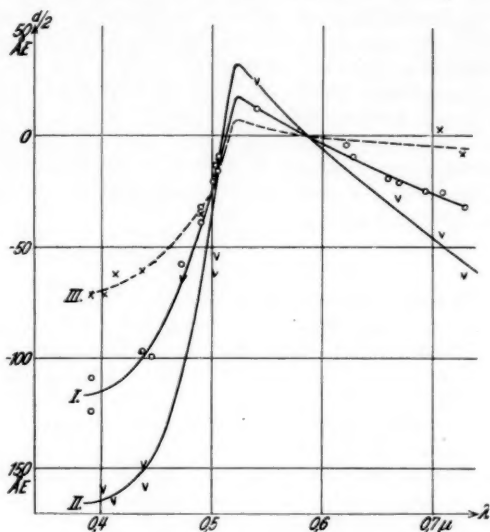


Fig. 10. Gold. Kurve I: Gold, kathodenzerstäubt,
Kurve II: Gold, verdampft,
Kurve III: Gold, verdampft,
darüber Silber, verdampft

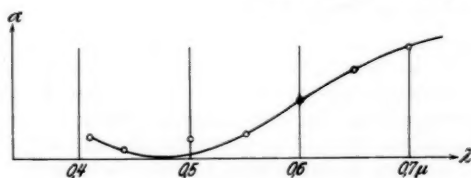


Fig. 10a. Gold, Extinktionskoeffizient
nach Hagen und Rubens

essant, da dieses Metall inmitten des sichtbaren Spektralbereichs, bei $\lambda = 0,49 \mu$ ein markantes Absorptionsminimum besitzt. Das Resultat ist in Fig. 10 wiedergegeben. Schon die Tatsache, daß die Kurven viel steiler laufen als sonst — es wurde in

Fig. 10 $d/2$, nicht d als Ordinate genommen — und ferner das ausgeprägte Maximum derselben, welchem dieser steile Verlauf zuzuschreiben ist, erfüllen unsere Erwartung. Kurve I in Fig. 10 wurde an einem kathodenzerstäubten, Kurve II an einem vakuumverdampften dünnen Spiegelpaar aufgenommen. Vergleichen wir nun diese Kurven mit dem Verlauf des Extinktionskoeffizienten bei Gold (Fig. 10a), welcher von Hagen und Rubens¹⁾ gemessen wurde, so zeigt sich, daß der allgemeine Verlauf gemäß unserer Regel stattfindet. Allerdings fällt das Minimum des Extinktionskoeffizienten nicht mit dem Maximum des Phasensprungs zusammen: Der Extinktionskoeffizient hat sein Minimum bei $\lambda = 0,49 \mu$, der Phasensprung sein Maximum zwischen $0,50$ und $0,52 \mu$.

4. Versilbertes Gold

Da die Kurve der optischen Dicke bei Silber von $\lambda = 0,5 \mu$ nach kürzeren Wellenlängen zu steigt, bei Gold fällt, so war die Frage interessant: Läßt sich durch Überlagerung beider Metalle eine optisch „neutrale“ Schicht herstellen? Diese Frage wurde durch folgenden Versuch geklärt. Auf die dünne, durch Verdampfung erhaltene Goldschicht (Kurve II), wurde eine sehr dünne Silberschicht aufgedampft und die Variation der optischen Dicke gemessen. In Fig. 10, Kurve III ist das Resultat wiedergegeben: Die Gold-Silber-Schicht zeigt in der Tat eine bedeutend kleinere Dispersion des Phasensprungs. Es wäre die Aufgabe weiterer Versuche, durch geeignete Kombination eine „Neutralschicht“ herzustellen, wie das hiermit als möglich nachgewiesen erscheint.

VI. Ursprung der Wellenlängenabhängigkeit des Phasensprungs

Man pflegt das Perot-Fabrysche Interferometer als eine Luftschicht zu betrachten, welche von zwei unendlich dünnen Metallschichten begrenzt wird. Man behandelt es also als *Zweiflächenproblem*, dessen Lösung durch die Airysche Formel gegeben wird. Der gefundene Zusammenhang zwischen Absorption der Metallschicht und scheinbarer Dicke der Luftschicht weist jedoch darauf hin, daß die *endliche* Dicke der Metallschichten und die optischen Konstanten n, k des Metalls die Interferenzerscheinung mitgestalten. Behalten wir also die Fiktion vollkommen ebener Trennungsflächen bei, so haben wir jetzt statt ihrer zwei (Fig. 11) deren vier, (Vier-

1) E. Hagen u. H. Rubens. Verh. d. D. Phys. Ges. 4. S. 55. 1902; Ann. d. Phys. 8. S. 432. 1902.

flächenproblem), wie Fig. 12 zeigt. Ein beliebiger Partialstrahl wird hier nicht nur innerhalb der Luftschicht hin- und hergeworfen, sondern auch innerhalb der Metallschichten.

Wie stark sich das auswirkt, läßt sich am Beispiel des sehr einfach verlaufenden Partialstrahls II (oder IIa), Fig. 13 einsehen, welcher dem Strahl I des Zweiflächenproblems zuzuordnen ist. Es sei für die Wellenlänge λ des Strahls $n_{\text{Metall}} > n_{\text{Quarz}}$. Dann erfährt Strahl I, zweimal am optisch dichteren Medium reflektiert, zweimal einen Phasensprung π , insgesamt einen Phasensprung 2π , der sich nicht bemerkbar macht. Ein Gleiches gilt allgemein für den n^{ten} Partialstrahl von Fig. 11, welcher $2n$ Reflexionen erfahren hat. Anders beim Strahl II von Fig. 13. Die erste Reflexion des Strahls I wird hier durch eine solche am optisch dünneren Medium ersetzt, bei welcher kein Phasensprung auftritt. Der Strahl II erleidet demnach im ganzen nur eine Phasenverzögerung π , was der Beobachter als eine Vergrößerung der optischen Luftdicke $3d$ um $\lambda/2$ deutet. Strahl II kommt nun gegen I um so mehr in Betracht, je geringer die Absorption in der Metallschicht ist, welche II zweimal öfter als I durchlaufen muß. Schon diese bruchstückhafte, qualitative Überlegung weist also auf einen Zusammenhang zwischen der metallischen Absorption und der scheinbaren Dicke der Luftschicht im experimentell gefundenen Sinne hin.

Die Rechnung läßt sich, wie bei der planparallelen Platte, nach zwei Methoden durchführen. Entweder baut man die

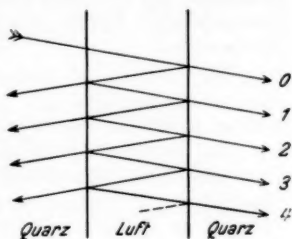


Fig. 11

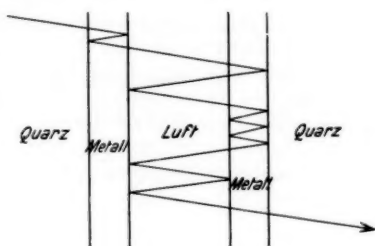


Fig. 12

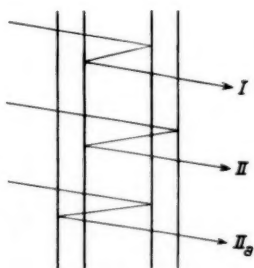


Fig. 13

austretende Welle aus den Partialwellen auf, oder man sucht sie als Lösung der Randwertaufgabe der Maxwell'schen Gleichungen¹⁾. Die erstere Methode würde hier, bei der dreifachen planparallelen Platte, recht mühsam sein, wir wählen darum die letztere.

Die Luftschicht können wir, wegen des außerordentlich spitzen Keilwinkels, als planparallele Platte behandeln, auf welche senkrecht eine ebene Welle auffällt. Letztere können wir aus Symmetriegründen als linear polarisiert annehmen. Die Luftschicht der Dicke d wird eingeschlossen durch zwei gleichdicke Metallschichten der Dicke a . Diese wiederum grenzen an die Quarzplatten, deren äußere Grenzen wir außer Betracht lassen können.

Wir lassen also in Quarz (1 erstes Medium) eine ebene Welle senkrecht einfallen, deren elektrischer Vektor in der y -, deren magnetischer in der x -Richtung schwinde. Ein Teil des einfallenden Lichtes wird an der Trennungsfläche 1/2 zurückgeworfen, ein Teil dringt hindurch. Dies wiederholt sich an den verschiedenen Trennungsflächen, so daß wir in jedem der fünf Medien Quarz 1, Metall 2, Luft 3, Metall 4, Quarz 5 je eine vorwärtslaufende und eine reflektierte Welle mit komplexer Amplitude als Resultante aller vorwärts- und

$$(1a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E}_1^e = e^{2\pi i \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right)}, \\ \mathfrak{E}_1^r = R_1 e^{2\pi i \left(\frac{t}{T} + \frac{z}{\lambda} \right)}, \\ \mathfrak{E}_2^e = E_2 e^{2\pi i \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right)}, \\ \mathfrak{E}_2^r = R_2 e^{2\pi i \left(\frac{t}{T} + \frac{z}{\lambda} \right)}, \\ \mathfrak{E}_3^e = E_3 e^{2\pi i \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right)}, \\ \mathfrak{E}_3^r = R_3 e^{2\pi i \left(\frac{t}{T} + \frac{z}{\lambda} \right)}, \\ \mathfrak{E}_4^e = E_4 e^{2\pi i \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right)}, \\ \mathfrak{E}_4^r = R_4 e^{2\pi i \left(\frac{t}{T} + \frac{z}{\lambda} \right)}, \\ \mathfrak{E}_5^e = E_5 e^{2\pi i \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right)}. \end{array} \right.$$

1) Vgl. z. B. Clemens Schaefer, Einführung in die theoretische Physik, Band III, 1. Teil, S. 539 ff.

aller zurücklaufenden Partialwellen ansetzen können, außer in 5, wo nur eine vorwärtslaufende Welle besteht. In komplexer Schreibweise bekommen wir also, wenn wir die Amplitude der in 1 einfallenden Welle gleich eins setzen, die neun in Gl. (1a) dargestellten Wellen:

Hierin bedeuten

E_i, R_i die unbekannten komplexen Amplituden,
 n_1 der Brechungsindex des Quarzes,
 $\tilde{n}_2 = N - ik$ der komplexe Brechungsindex des Metalls.

Die Maxwell'schen Gleichungen vereinfachen sich, da nur ein \mathfrak{E}_y und ein \mathfrak{H}_x existieren, zu

$$\frac{s}{c} \cdot \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z},$$

$$\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z}.$$

Sie lassen uns aus den \mathfrak{E}_i die \mathfrak{H}_i gewinnen:

$$(1b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{H}_1^e = -n_1 e^{2\pi i \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right)}, \\ \mathfrak{H}_1^r = n_1 R_1 e^{2\pi i \left(\frac{t}{T} + \frac{z}{\lambda} \right)}, \\ \mathfrak{H}_2^e = -\tilde{n}_2 E_2 e^{2\pi i \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right)}, \\ \mathfrak{H}_2^r = \tilde{n}_2 R_2 e^{2\pi i \left(\frac{t}{T} + \frac{z}{\lambda} \right)}, \\ \mathfrak{H}_3^e = -E_3 e^{2\pi i \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right)}, \\ \mathfrak{H}_3^r = R_3 e^{2\pi i \left(\frac{t}{T} + \frac{z}{\lambda} \right)}, \\ \mathfrak{H}_4^e = -\tilde{n}_2 E_4 e^{2\pi i \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right)}, \\ \mathfrak{H}_4^r = \tilde{n}_2 R_4 e^{2\pi i \left(\frac{t}{T} + \frac{z}{\lambda} \right)}, \\ \mathfrak{H}_5^e = -n_1 E_5 e^{2\pi i \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right)}. \end{array} \right.$$

Die Randbedingungen sind durch die Forderung, daß die tangentiellen Komponenten von \mathfrak{E} und \mathfrak{H} eine Trennungsfläche zweier Medien stetig durchsetzen, gegeben. Bedeute z. B. $\mathfrak{E}_{3, a+d}^r$ die elektrische Feldstärke der im Medium 3 an der Stelle $z = a + d$ zurückgeworfenen Welle daselbst. Dann lauten die Randbedingungen:

$$(2a) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_{1,0}^e + \mathfrak{E}_{1,0}^r = \mathfrak{E}_{2,0}^e + \mathfrak{E}_{2,0}^r, \\ \mathfrak{E}_{2,a}^e + \mathfrak{E}_{2,a}^r = \mathfrak{E}_{3,a}^e + \mathfrak{E}_{3,a}^r, \\ \mathfrak{E}_{3,a+d}^e + \mathfrak{E}_{3,a+d}^r = \mathfrak{E}_{4,a+d}^e + \mathfrak{E}_{4,a+d}^r, \\ \mathfrak{E}_{4,2a+d}^e + \mathfrak{E}_{4,2a+d}^r = \mathfrak{E}_{5,2a+d}^e. \end{cases}$$

$$(2b) \quad \begin{cases} \mathfrak{S}_{1,0}^e + \mathfrak{S}_{1,0}^r = \mathfrak{S}_{2,0}^e + \mathfrak{S}_{2,0}^r, \\ \mathfrak{S}_{2,a}^e + \mathfrak{S}_{2,a}^r = \mathfrak{S}_{3,a}^e + \mathfrak{S}_{3,a}^r, \\ \mathfrak{S}_{3,a+d}^e + \mathfrak{S}_{3,a+d}^r = \mathfrak{S}_{4,a+d}^e + \mathfrak{S}_{4,a+d}^r, \\ \mathfrak{S}_{4,2a+d}^e + \mathfrak{S}_{4,2a+d}^r = \mathfrak{S}_{5,2a+d}^e. \end{cases}$$

Setzen wir hierin die \mathfrak{E}_i , \mathfrak{S}_i aus Gl. (1a), (1b) ein, so erhalten wir:

$$(3a) \quad \begin{cases} 1 + R_1 = E_2 + R_2 \\ E_2 e^{-2\pi i \frac{\tilde{n}_2 a}{\lambda}} + R_2 e^{2\pi i \frac{\tilde{n}_2 a}{\lambda}} = E_3 e^{-2\pi i \frac{a}{\lambda}} \\ \quad + R_3 e^{2\pi i \frac{a}{\lambda}}, \\ E_3 e^{-2\pi i \frac{a+d}{\lambda}} + R_3 e^{2\pi i \frac{a+d}{\lambda}} = E_4 e^{-2\pi i \frac{(a+d)\tilde{n}_2}{\lambda}} \\ \quad + R_4 e^{2\pi i \frac{(a+d)\tilde{n}_2}{\lambda}}, \\ E_4 e^{-2\pi i \frac{(2a+d)\tilde{n}_2}{\lambda}} + R_4 e^{2\pi i \frac{(2a+d)\tilde{n}_2}{\lambda}} = E_5 e^{-2\pi i \frac{(2a+d)\tilde{n}_2}{\lambda}}. \end{cases}$$

$$(3b) \quad \begin{cases} -n_1 + n_1 R_1 = -\tilde{n}_2 E_2 \\ \quad + \tilde{n}_2 R_2, \\ -\tilde{n}_2 E_2 e^{-2\pi i \frac{\tilde{n}_2 a}{\lambda}} + \tilde{n}_2 R_2 e^{2\pi i \frac{\tilde{n}_2 a}{\lambda}} = -E_3 e^{-2\pi i \frac{a}{\lambda}} \\ \quad + R_3 e^{2\pi i \frac{a}{\lambda}}, \\ -E_3 e^{-2\pi i \frac{a+d}{\lambda}} + R_3 e^{2\pi i \frac{a+d}{\lambda}} = -\tilde{n}_2 E_4 e^{-2\pi i \frac{(a+d)\tilde{n}_2}{\lambda}} \\ \quad + \tilde{n}_2 R_4 e^{2\pi i \frac{(a+d)\tilde{n}_2}{\lambda}}, \\ -\tilde{n}_2 E_4 e^{-2\pi i \frac{(2a+d)\tilde{n}_2}{\lambda}} + \tilde{n}_2 R_4 e^{2\pi i \frac{(2a+d)\tilde{n}_2}{\lambda}} = -n_1 E_5 e^{-2\pi i \frac{(2a+d)\tilde{n}_2}{\lambda}}. \end{cases}$$

Dies sind acht lineare Gleichungen für die acht Unbekannten R_1 bis R_4 und E_2 bis E_5 . Es kommt uns nur auf E_5 an, welches sich errechnet zu:

$$(4) E_5 = \frac{16 n_1 \tilde{n}_2^2}{e^{2\pi i \frac{(2a+d)n_1}{\lambda}} \left\{ \left[(1 + \tilde{n}_2)(\tilde{n}_2 + n_1) e^{2\pi i \frac{a\tilde{n}_2}{\lambda}} + (1 - \tilde{n}_2)(\tilde{n}_2 - n_1) e^{-2\pi i \frac{a\tilde{n}_2}{\lambda}} \right]^2 e^{2\pi i \frac{d}{\lambda}} - \left[(1 - \tilde{n}_2)(\tilde{n}_2 + n_1) e^{2\pi i \frac{a\tilde{n}_2}{\lambda}} + (1 + \tilde{n}_2)(\tilde{n}_2 - n_1) e^{-2\pi i \frac{a\tilde{n}_2}{\lambda}} \right]^2 e^{-2\pi i \frac{d}{\lambda}} \right\}}$$

Multiplizieren wir E_5 mit dem konjugiert Komplexen, so erhalten wir die Intensität I des austretenden Lichtes. Um zu finden, bei welcher scheinbaren Luftschichtdicke d ein Maximum von I liegt, müssen wir alsdann $\frac{\partial I}{\partial d} = 0$ bilden und ausrechnen.

Wir schreiben mit abkürzenden Bezeichnungen:

$$E_5 \sim \frac{1}{\eta^2 e^{i\delta} - \zeta^2 e^{-i\delta}},$$

wobei

$$\eta = (1 + \tilde{n}_2)(\tilde{n}_2 + n_1) e^{\Re} e^{i\Re} - (\tilde{n}_2 - 1)(\tilde{n}_2 - n_1) e^{-\Re} e^{-i\Re},$$

$$\zeta = -(\tilde{n}_2 - 1)(\tilde{n}_2 + n_1) e^{\Re} e^{i\Re} + (\tilde{n}_2 + 1)(\tilde{n}_2 - n_1) e^{-\Re} e^{-i\Re}$$

und hierin wieder

$$\Re = \frac{2\pi a k}{\lambda}, \quad \Im = \frac{2\pi a N}{\lambda};$$

ferner

$$\delta = \frac{2\pi d}{\lambda}.$$

E_5 mit dem konjugiert Komplexen multipliziert, ergibt

$$I \sim \frac{1}{(\eta^2 e^{i\delta} - \zeta^2 e^{-i\delta})(\bar{\eta}^2 e^{-i\delta} - \bar{\zeta}^2 e^{i\delta})} = \frac{1}{\eta^2 \bar{\eta}^2 + \zeta^2 \bar{\zeta}^2 - (\zeta^2 \bar{\eta}^2 e^{-2i\delta} + \bar{\zeta}^2 \eta^2 e^{2i\delta})} = \frac{1}{P},$$

$$\frac{\partial I}{\partial d} = \frac{2i}{P^2} (-\zeta^2 \bar{\eta}^2 e^{-2i\delta} + \bar{\zeta}^2 \eta^2 e^{2i\delta}) = 0,$$

$$e^{4i\delta} = \left(\frac{\zeta \bar{\eta}}{\bar{\zeta} \eta} \right)^2; \quad e^{2i\delta} = \frac{\zeta \bar{\eta}}{\bar{\zeta} \eta}.$$

Benennen wir in Polarkoordinaten

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \zeta \bar{\eta} = \varrho \cdot e^{i\lambda}, \\ \eta \bar{\zeta} = \varrho \cdot e^{-i\lambda}, \\ e^{2i\delta} = e^{2i\lambda}, \\ \text{so wird} \\ \text{wobei} \\ \text{tg } \lambda = \frac{\Im(\zeta \bar{\eta})}{\Re(\zeta \bar{\eta})} = \text{tg } \delta. \end{array} \right.$$

Wir benennen ferner in Polarkoordinaten

$$\tilde{n}_2 + 1 = N + 1 - ik = r_1 e^{i\varphi_1}; \quad r_1^2 = (N + 1)^2 + k^2; \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{-k}{N+1};$$

$$\tilde{n}_2 - 1 = N - 1 - ik = r_2 e^{i\varphi_2}; \quad r_2^2 = (N - 1)^2 + k^2; \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{-k}{N-1};$$

$$\tilde{n}_2 + n_1 = N + n_1 - ik = s_1 e^{i\psi_1}; \quad s_1^2 = (N + n_1)^2 + k^2; \quad \operatorname{tg} \psi_1 = \frac{-k}{N+n_1};$$

$$\tilde{n}_2 - n_1 = N - n_1 - ik = s_2 e^{i\psi_2}; \quad s_2^2 = (N - n_1)^2 + k^2; \quad \operatorname{tg} \psi_2 = \frac{-k}{N-n_1}.$$

Dann wird

$$\begin{aligned} \bar{\eta} \zeta &= (r_1 s_1 e^{i\varphi_1} e^{i\psi_1} + r_2 s_2 e^{-i\varphi_2} e^{-i\psi_2}) \\ &\quad \cdot (-r_2 s_1 e^{i\varphi_2} e^{i\psi_1} + r_1 s_2 e^{-i\varphi_1} e^{i\psi_2}) \\ &= -r_1 r_2 s_1^2 e^{2i\varphi_1} e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)} - r_1 r_2 s_2^2 e^{-2i\varphi_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \\ &\quad + s_1 s_2 r_1^2 e^{-i(\psi_1 - \psi_2 + 2\varphi_1)} + s_1 s_2 r_2^2 e^{i(\psi_1 - \psi_2 + 2\varphi_2)} \\ &= r_1 r_2 s_1 s_2 \left\{ -\frac{s_1}{s_2} e^{2i\varphi_1} e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)} - \frac{s_2}{s_1} e^{-2i\varphi_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{r_1}{r_2} e^{-i(\psi_1 - \psi_2 + 2\varphi_1)} + \frac{r_2}{r_1} e^{i(\psi_1 - \psi_2 + 2\varphi_2)} \right\}. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir

$$\frac{s_1}{s_2} e^{2i\varphi_1} = u; \quad \frac{r_1}{r_2} = v;$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \omega_1; \quad \psi_1 - \psi_2 + 2\varphi_2 = \omega_2$$

und trennen wir Real- und Imaginärteil, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \bar{\eta} \zeta &= r_1 r_2 s_1 s_2 \left\{ -\left(u + \frac{1}{u}\right) \cos \omega_1 + \left(v + \frac{1}{v}\right) \cos \omega_2 \right. \\ &\quad \left. + i \left[\left(u - \frac{1}{u}\right) \sin \omega_1 - \left(v - \frac{1}{v}\right) \sin \omega_2 \right] \right\} \end{aligned}$$

und hieraus nach Gl. (5):

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\left(u - \frac{1}{u}\right) \sin \omega_1 - \left(v - \frac{1}{v}\right) \sin \omega_2}{-\left(u + \frac{1}{u}\right) \cos \omega_1 + \left(v + \frac{1}{v}\right) \cos \omega_2},$$

oder etwas ausführlicher:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{2\pi d}{\lambda} &= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{Q}} e^{\frac{4\pi a k}{\lambda}} - \sqrt{Q} e^{-\frac{4\pi a k}{\lambda}}\right) \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{-\left(\frac{1}{\sqrt{Q}} e^{\frac{4\pi a k}{\lambda}} + \sqrt{Q} e^{-\frac{4\pi a k}{\lambda}}\right) \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \\ &\quad - \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{R}} - \sqrt{R}\right) \sin\left(\psi_1 - \psi_2 + \frac{4\pi a N}{\lambda}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{R}} + \sqrt{R}\right) \cos\left(\psi_1 - \psi_2 + \frac{4\pi a N}{\lambda}\right)}, \end{aligned}$$

wobei

$$\rho = \frac{(N - n_1)^2 + k^2}{(N + n_1)^2 + k^2} \quad \text{der Reflexionskoeff. bei Refl. aus Quarz an Metall oder umgekehrt,}$$

$$R = \frac{(N - 1)^2 + k^2}{(N + 1)^2 + k^2} \quad \text{der Reflexionskoeff. bei Refl. aus Luft an Metall oder umgekehrt.}$$

Tabelle 1
Silber, berechnet

λ	k	N	R in %	Autor	d , berechnet in ÅE
3460	1,10	0,22	67,5	Minor	702
3610	1,45	0,20	77,4	"	650
3950	1,91	0,16	87,1	"	624
4500	2,39	0,16	91,7	"	576
5000	2,94	0,17	93,2	"	530
5500	3,31	0,18	94,2	"	517
5893	3,64	0,18	95,0	"	507
6300	3,96	0,20	95,3	Drude	498

Tabelle 2
Gold, berechnet

λ	k	N	R in %	Autor	d , berechnet in ÅE
4000	1,785	1,580	36,0	Tool	396
4200	1,800	1,570	36,2	"	412
4400	1,790	1,535	36,2	"	431
4600	1,740	1,450	35,8	"	465
4800	1,685	1,280	36,4	"	518
5000	1,750	0,935	41,5	"	605
5200	2,010	0,670	60,8	"	676
5400	2,305	0,535	71,0	"	653
5800	2,750	0,415	82,7	"	626
6200	3,160	0,350	88,9	"	601
6600	3,540	0,320	91,0	"	581
7000	3,800	0,280	93,0	"	574

Die Werte für N , k , R , entnehmen wir für Silber den Messungen von Minor¹⁾ und Drude²⁾, für Gold den Messungen von Tool³⁾ und Drude²⁾ am massiven Metall. Als Dicke der Metallschicht nehmen wir z. B. 50 $m\mu$ an. Die so errechneten Kurven $d = d(\lambda)$ werden durch die Tabellen 1 und 2, sowie durch Figg. 14 und 15 dargestellt. Sie geben, wie ein Vergleich

1) R. S. Minor, Ann. d. Phys. [4] **10**. S. 581. 1903.2) P. Drude, Wied. Ann. **36**. S. 481. 1890.3) A. Q. Tool, Phys. Rev. **31**. S. 1. 1910.

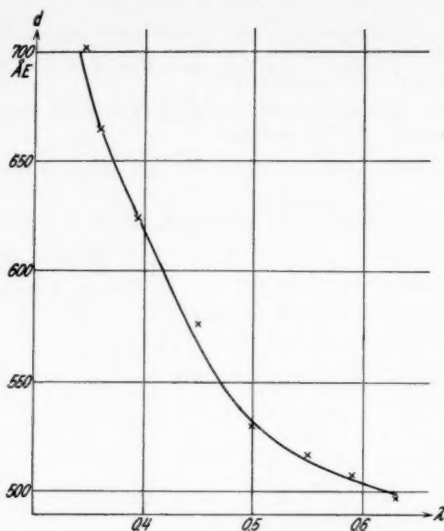


Fig. 14. Silber, berechnet

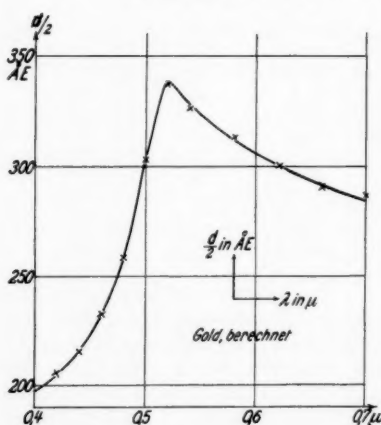


Fig. 15. Gold, berechnet

von Fig. 14 mit Fig. 5 und von Fig. 15 mit Fig. 10 zeigt, den Typus der experimentell gefundenen Kurven in allen Einzelheiten wieder.

Während man also bisher die relative Verschiebung des Interferenzstreifensystems bei verschiedenen Wellenlängen im Perot-Fabry-Etalon phänomenologisch als „variablen Phasensprung“ bezeichnete, wobei die Vorstellung unendlich dünner hochreflektierender Metallspiegel zugrunde lag, stellt sich diese Erscheinung, wenn man die *endliche* Dicke der Metallschichten berücksichtigt, als deren natürliche Folge dar und läßt sich aus den optischen Konstanten N , k des Metalls berechnen.

Anmerkung bei der Korrektur zu V. Versuchsergebnisse,

1. Silber:

Die beiden von Buisson und Fabry einerseits, von Ritschl andererseits gefundenen Modifikationen des Silbers sind wohl die gleichen, welche Falkenhagen¹⁾ für das verschiedene optische Verhalten

1) H. Falkenhagen im Handbuch der physikalischen Optik von Gehrke, Bd. 1, S. 795.

dünnster und dickerer Metallschichten verantwortlich machte, und welche von Dreisch und Rütten¹⁾ durch Absorptionsmessungen im Ultrarot, von Kirchner²⁾ durch Elektroneninterferenzen nachgewiesen wurden.

Zusammenfassung

1. Nach der als „Keilmethode“ bekannten Methode von Fabry und Buisson wird die Dispersion des Phasensprungs bei dünnen Silber-, Gold- und Platinschichten untersucht, welche teils durch Kathodenzerstäubung, teils durch Verdampfung im Hochvakuum hergestellt wurden. Hierbei zeigte sich ein enger Zusammenhang des Phasensprungs mit dem Absorptionskoeffizienten in dem Sinne, daß mit fallendem Absorptionskoeffizienten der Phasensprung steigt.

2. Als Nebenresultat wurde gefunden, daß die zwei Modifikationen des Silbers, welche Fabry und Buisson in der Untersuchung, welche der vorliegenden zugrunde liegt, festgestellt hatten, mit den von Ritschl gefundenen identisch sind. Als zweites Nebenresultat wurde gefunden, daß bei nicht vollkommen homogenen Schichten der Verlauf des Phasensprungs an verschiedenen Stellen der Schicht nicht ganz der gleiche ist.

3. Zur Deutung der Abhängigkeit des Phasensprungs von der Wellenlänge wurden die Reflexionen innerhalb der Metallschichten an deren Grenzflächen herangezogen. Während also bisher die Interferenzerscheinung im Perot-Fabryschen Etalon als Zweiflächenproblem behandelt wurde (Airysche Formel), wird sie hier als Vierflächenproblem aufgefaßt und gerechnet. Es ergibt sich für die verschiedenen Metalle der experimentell gefundene Verlauf des „Phasensprungs“ mit der Wellenlänge.

Die vorliegende Arbeit wurde in den Jahren 1931/32 im Physikalischen Institut der Universität Frankfurt a. M. angefertigt.

Für die Anregung zu dieser Arbeit, sowie für sein stetes förderndes Interesse während der ganzen Untersuchung bin ich Herrn Prof. Dr. K. W. Meissner zu größtem Danke verpflichtet. Ferner danke ich Herrn Privatdozent Dr. W. Magnus für freundschaftlich erteilten mathematischen Rat.

1) Th. Dreisch u. E. Rütten, Ztschr. f. Phys. **60**. S. 69. 1930.

2) F. Kirchner, Ztschr. f. Phys. **76**. S. 576. 1932.

Frankfurt a. M., 14. Mai 1934, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 14. Mai 1934)

**Die Norburysche Beziehung
beim thermischen Widerstand der Metalle**

Von H. Reddemann

(Mit 6 Figuren)

Reine Metalle mit dem elektrischen Widerstand $[\varrho]$ und dem Wärmewiderstand $[w]$ erleiden durch Deformation oder durch Zusatz von Fremdmetallen sowohl eine Erhöhung des elektrischen wie des thermischen Widerstandes ($\Delta\varrho$ bzw. Δw). Nach früheren Untersuchungen von Grüneisen und Goens¹⁾, die an einer großen Anzahl von thermisch und mechanisch verschieden behandelten oder durch irgendwelche kleinere Fremdmetallzusätze verunreinigten Metallen vorgenommen wurden, sind (bei einer bestimmten Temperatur) beide Widerstandserhöhungen einander proportional. Es gilt mit anderen Worten die als eine Erweiterung des Wiedemann-Franz-Lorenz'schen Gesetzes anzusehende sog. Regel der „isothermen Geraden“:

$$(1) \quad \Delta w = \frac{1}{ZT} \cdot \Delta\varrho$$

oder

$$(1a) \quad w - [w] = \frac{1}{ZT} \cdot (\varrho - [\varrho]).$$

Darin bedeuten ϱ und w den elektrischen und thermischen Widerstand des verunreinigten Metalles, T die absolute Temperatur, $1/Z$ die von dem Grundmetall abhängige Neigungskonstante der isothermen Geraden. Da die Geraden im allgemeinen nicht durch den Nullpunkt gehen, sondern die w -Achse oberhalb 0 in der Höhe a schneiden, werden wir die Gl. (1) aus Bequemlichkeitsgründen in der Form

$$(1b) \quad w = a + \frac{1}{ZT} \cdot \varrho$$

benutzen.

Die von Grüneisen und Goens für kleine Fremdmetallzusätze gefundene Proportionalität zwischen $\Delta\varrho$ und Δw be-

1) E. Grüneisen u. E. Goens, Ztschr. Phys. **44**, S. 615. 1927.

deutet, daß auch für den Wärmewiderstand die sog. *Norbury'sche Beziehung* angewendet werden kann, nach der die durch Fremdmetallzusatz verursachte atomare Widerstandserhöhung um so größer wird, je weiter der horizontale Abstand zwischen Grund- und Zusatzmetall im periodischen System ist.

Es liegen nun folgende Fragen nahe:

1. Bis zu wie großen Zusätzen eines Fremdmetalls ist die Regel der „isothermen Geraden“ erfüllt? Gilt sie auch für Legierungen, wo das zugesetzte Metall prozentisch einen wesentlichen Teil des Grundmetalls ausmacht oder wann treten Abweichungen auf? Sind diese Abweichungen verschieden je nach zugesetztem Fremdmetall?

2. Ist die Konstante $1/Z$ für alle zugesetzten Metalle die gleiche oder gibt es verschiedene Neigungskonstanten je nach Stellung des Zusatzmetalles im periodischen System?

Um diese Fragen zu beantworten, wurden — neben vor der Veröffentlichung stehenden neuen Messungen¹⁾ — frühere Ergebnisse für Cu-, Al-, Au-, Ag- und Pt-Legierungen bei Zimmertemperatur und für Cu-Legierungen auch bei $+100^\circ\text{C}$ aus der Literatur zusammengestellt. In der Hauptsache handelt es sich dabei um Mischkristalle, doch sind auch einige Fälle, wo Verbindungsbildung auftritt, aufgenommen.

1. Cu-Legierungen

In Fig. 1 ist w als Ordinate, $\frac{\rho}{T} \cdot 10^9$ als Abszisse für $T = 293^\circ$ und $T = 373^\circ$ aufgetragen. Die einzelnen Punkte entsprechen, wie aus Tab. 1 und 2 ersichtlich, den verschiedensten Legierungen. Man bemerkt auf den ersten Blick, daß die Regel der isothermen Geraden mindestens bis zu den Werten $w = 1,6 \frac{\text{cm Grad}}{\text{Watt}}$, $\frac{\rho}{T} = 44 \cdot 10^{-9} \frac{\text{Ohm cm}}{\text{Grad}}$ (d. h. bis zu einem gewissen Prozentsatz zugesetzten Fremdmetalls) für alle untersuchten Legierungen mit großer Annäherung gilt. Denn man muß bedenken, daß die Abweichungen von der Geraden durchaus der Ungenauigkeit der Wärmeleitungsmessung entsprechen.

Aus der Neigung der Kurven in Fig. 1 wurden die Konstanten

$$Z = 2,69 \cdot 10^{-8}; a = 0,035 \text{ bei } T = 293^\circ$$

$$Z = 2,52 \cdot 10^{-8}; a = 0,023 \text{ bei } T = 373^\circ$$

1) E. Grüneisen u. H. Reddemann, demnächst in den Ann. d. Phys.

Tabelle 1

Cu-Legierungen bei Z.-Temp. $a = 0,035$; $Z = 2,69 \cdot 10^{-8}$

Hauptzusatz in Gew.-%	Andere Zusätze	Beobachter	Temp. in °C	$\frac{\rho}{T} \cdot 10^9$	$w_{\text{beob.}}$	$w_{\text{ber.}}$
Cu rein		Grüneisen	18	5,98	0,255	0,257
Cu III	mehr oder weniger rein	Jäg. u. Diess.	18	6,02	260	259
II		"		6,22	272	267
I		"		6,67	286	283
		"				
Sn 0,99		Smith	20	10,9	0,439	0,440
1,92		"		16,15	605	636
4,92		"		32,02	1,22 ₅	1,22 ₅
5		Schenck	20	33,5	1,37	1,28
7,48		Smith	20	43,3	1,55	1,64
9,9		Großmann	13,5	56,7	2,27	2,14
10,4		Smith	20	53,1	1,97	2,01
24,45		Großmann	13,5	108,5	4,05	4,07
Sn 4,18	0,33 P	Smith	20	46,7	1,59	1,77
4,88	1,16 Pb	"		32,1	1,20	1,23
5,0	2,0 Zn 0,15 P	Griff. u. Schof.	20	31,8	1,26	1,22
8,0	0,30 "	"		57,7	2,21	2,18
10,0	2,0 Zn 0,15 "	"		59,7	2,34	2,26
10,0	2,0 " —	"		54,7	2,02	2,07
12,4	— 0,4 "	"		72,8	2,75	2,74
Zn 3,11		Schenck	20	9,18	0,367	0,376
5,0		"		12,53	483	501
35,5	etwas Sn u. Mn	Griff. u. Schof.	20	31,6	1,27	1,21
30	Messing	Lees	18	22,55	0,922	0,873
	„Messing rot“	Lorenz	18	22,65	944	877
	„Messing gelb“	"		27,9	1,12	1,07
	Messing	Berget	15	22,2	0,910	0,861
Zn, Sn, Ni	„Rotguß“	Jäg. u. Diess.	18	43,6	1,66	1,65
15 Ni, 22 Zn	„German silver“	Lees	18	137,0	4,07	5,13
Ni 3,94		Schenck	20	29,7	1,15	1,14
17,3		"		88,7	2,94	3,33
40	„Konstantan“	Jäg. u. Diess.	18	168,5	4,43	6,30
46		Grüneisen	18	173,0	4,93	6,47
Mn	Ni „Manganin“	Jäg. u. Diess.	18	144,5	4,61	5,41
Mn	0,04% Ni	Lees	18	153,0	4,62	5,72
As Nr. 1		Grüneisen	18	18,0	0,702	0,705
" 2		"		68,3	2,40	2,57
P 0,042		Smith	20	7,88	0,329	0,328
0,075		"		10,47	420	424
0,239		"		18,53	691	724
0,480		"		28,8	1,11	1,11
677		"		39,6	1,45	1,51
930		"		52,2	1,85	1,97
Al 10,0		Griff. u. Schof.	20	50,2	1,96	1,90

ermittelt und in Tab. 1 und 2 die nach Formel (1b) aus den gemessenen ϱ -Werten berechneten w mit den beobachteten

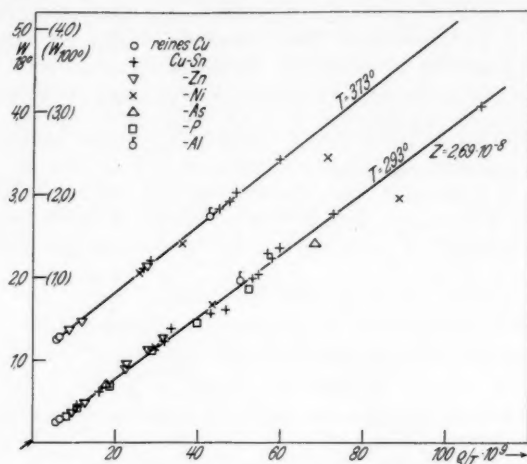


Fig. 1. Cu-Legierungen

Tabelle 2

Cu-Legierungen bei 100° C. $a = 0,023$; $Z = 2,52 \cdot 10^{-8}$

Hauptzusatz in Gew.-%	Andere Zusätze	Beobachter	$\frac{\varrho}{T} \cdot 10^6$	$w_{\text{beob.}}$	$w_{\text{ber.}}$
Cu III	} mehr oder weniger rein	Jäg. u. Diess.	6,16	0,264	0,267
II			6,42	278	278
Sn 5,0	2,0 Zn 0,15 P 0,30 2,0 Zn 0,15 " 2,0 " — — 0,4 P	Schenck	28,55	1,19	1,16
5,0		Griff. u. Schof.	26,84	1,10	1,09
8,0		"	47,7	1,91	1,92
10,0		"	49,3	2,02	1,98
10,0		"	45,1	1,82	1,81
12,4		"	59,8	2,41	2,40
Zn 3,11	etwas Sn u. Mn	Schenck	8,90	0,360	0,376
5,0		"	11,92	465	496
38,5		Griff. u. Schof.	27,35	1,14	1,11
Zn, Sn, Ni	„Rotguß“	Jäg. u. Diess.	36,15	1,41	1,46
Ni 3,94	„Konstantan“	Schenck	25,85	1,05	1,05
17,3		"	71,3	2,44	2,85
40		Jäg. u. Diess.	131,9	3,75	5,25
Al 10,0		Griff. u. Schof.	42,8	1,74	1,72

Werten für w verglichen¹⁾. Die Abweichungen $w_{\text{ber.}}$ gegen $w_{\text{beob.}}$ betragen bis zu dem angegebenen ρ/T -Wert nicht mehr als 5% für alle Legierungen. Für die Legierungen mit Sn, Zn, Al, As treten größere Abweichungen überhaupt nicht oder erst bei höheren ρ/T -Werten auf. Eine Ausnahme bilden die sämtlich zu hoch liegenden w -Werte für Messing.

Als Beispiel für starke Abweichungen oberhalb $\frac{\rho}{T} = 44 \cdot 10^{-9}$ ist der Verlauf der ρ - w -Kurve für Cu-Ni in Fig. 2 nochmals

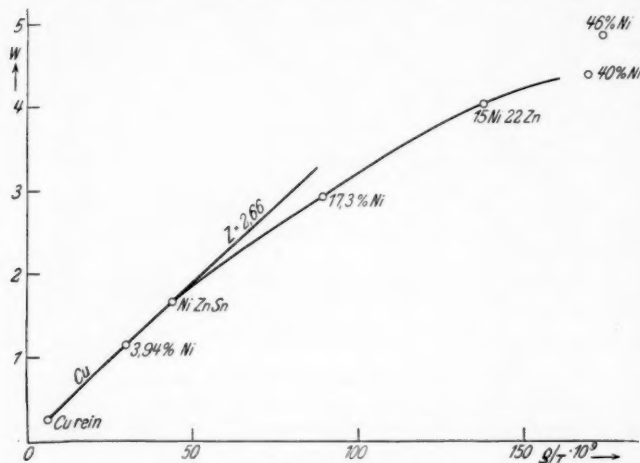


Fig. 2. Cu-Ni-Legierungen bei 18°

gesondert wiedergegeben. Die Kurve ist nach unten gekrümmt d. h. der Warmwiderstand nimmt durch Ni-Zusatz weniger stark zu als der elektrische Widerstand.

Gegen Phosphor und Arsen ist Cu — entsprechend dem großen horizontalen Abstand zwischen Cu und P im periodischen System — sehr empfindlich. Schon Zusätze unterhalb

1) Das Zahlenmaterial stammt aus folgenden Arbeiten: A. Berget, C. R. 110. S. 76. 1890; E. Griffiths u. F. H. Schofield, Journ. Inst. of Metals 39. S. 337. 1928; E. Grüneisen, Ann. d. Phys. 3. S. 43. 1900; G. Großmann, Ann. Beibl. 29. S. 178. 1905; W. Jäger u. H. Diesselhorst, Wiss. Abhdl. P. T. R. 3. S. 269. 1900; Ch. H. Lees, Phil. Trans. 208. S. 381. 1908; L. Lorenz, Wied. Ann. 13. S. 422, 582. 1881; R. Schenck, Ann. d. Phys. 32. S. 261. 1910; C. St. Smith, Mining and Metallurgy, Technic. Publ. 360. New York 1930.

10/o P lassen ρ/T über $44 \cdot 10^{-9}$ wachsen, größere Zusätze beeinflussen offenbar ρ und w wie Ni in verschiedener Weise: es treten Abweichungen von der Geraden auf.

2. Al-Legierungen

Der Zusammenstellung der Tab. 3 für Al-Legierungen liegen Messungen von Masumoto¹⁾ zugrunde, die anscheinend mit großer Genauigkeit nach der Kohlrauschmethode bei ungefähr 30° ausgeführt sind. Die Proben unterscheiden sich erstens, wie aus Tab. 3 hervorgeht, durch ihre Zusammensetzung, zweitens durch ihre mechanisch und thermisch verschiedene Vorbehandlung. Für alle Proben sind die w - ρ/T -Kurven mit großer Annäherung Geraden (Fig. 3). ρ/T überschreitet dabei

Tabelle 3

Al-Legierungen bei + 30° C. $Z = 2,44 \cdot 10^{-8}$; $a = 0,062$

Nr. 1—19: Masumoto Al-Legierungen „gegossen und gegläht“.

„ I: Schofield } 99%iges Al.
„ II: Jäg. u. Diess. }

Nr.	$\frac{\rho}{T} \cdot 10^9$	$w_{\text{beob.}}$	$w_{\text{ber.}}$	Zusatz in Gew.-%								
				Al	Mg	Zn	Cu	Si	Sn	Ni	Mn	Fe
I	9,77	0,452	0,462	99	—	—	—	—	—	—	—	—
II	10,82	495	505	99	—	—	0,4	—	—	—	—	0,5
1	10,92	0,499	0,509	99,35	—	—	—	0,14	—	—	—	0,51
2	21,40	915	939	96,0	—	—	1,8	0,4	—	—	—	0,9
3	13,19	604	603	95,6	1,5	—	1,85	0,1	—	—	—	0,95
4	13,39	607	611	94,8	1,6	—	1,8	0,3	—	1,0	—	0,5
5	13,32	612	608	93,6	0,9	—	2,5	0,4	—	1,7	—	0,9
6	14,58	656	660	93,5	0,4	—	4,3	0,4	—	—	0,5	0,9
7	15,48	690	697	93,3	—	2,6	2,5	0,3	—	—	0,5	0,8
8	14,62	660	661	91,8	1,15	—	5,3	0,45	—	—	0,5	0,8
9	15,14	680	682	91,5	0,9	—	4,4	0,5	—	2,05	—	0,65
10	13,17	603	602	90,9	—	—	6,9	0,3	1,2	—	—	0,7
11	13,13	597	600	90,9	—	—	8,1	0,4	—	—	—	0,6
12	16,66	739	745	89,9	—	—	8,4	0,3	—	—	0,7	0,7
15	14,90	675	673	86,9	—	—	12,2	0,3	—	—	—	0,6
16	16,70	751	747	86,0	—	—	12,2	0,2	—	—	1,0	0,6
17	16,85	753	753	84,3	—	12,0	2,7	0,4	—	—	—	0,6
18	13,69	627	623	84,0	—	—	10,5	0,3	3,3	1,05	—	0,85
19	21,40	925	939	76,2	—	20,3	2,6	0,35	—	—	—	0,55
13	13,33	0,562	0,609	87,3	—	—	—	11,9	—	—	—	0,8
14	17,68	737	786	87,0	1,6	—	3,8	6,1	—	—	0,6	0,9

1) H. Masumoto, Sci. Rep. Toh. Univ. 13. S. 229. 1925; vgl. auch M. Jakob, Ztschr. f. Metallk. 1926. S. 55.

nicht den Wert $25 \cdot 10^{-9}$. Eine Ausnahme bilden die Proben 13 und 14 mit Si-Gehalt von 6 und 12 Gewichts-Prozenten: ρ wächst stärker als w , die beiden Punkte liegen unterhalb der Geraden. — Der Kürze halber sind in Tab. 3 nur für die der Behandlung „gegossen und geglüht“ unterzogenen Proben die beobachteten mit den nach (1b) berechneten w -Werten verglichen. Die Über-

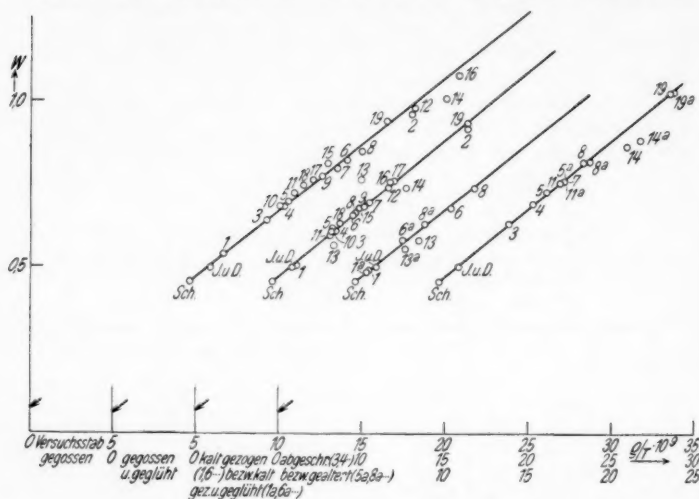


Fig. 3. Al-Legierungen bei 30° C.
Sch. reines Al von Schofield; J. u. D. reines Al von Jäger und Diesselhorst; 1—19 Legierungen von Masumoto

einstimmung ist bis auf die beiden Si-Proben vorzüglich. Die Abweichungen liegen meist unter 1%. Die reinen Al-Sorten von Schofield¹⁾ und Jäger und Diesselhorst²⁾ passen sich ebenfalls befriedigend an.

3. Edelmetalllegierungen

Hier wurden Messungen von F. A. Schulze³⁾, Schenck⁴⁾ und Jäger und Diesselhorst²⁾ ausgewertet.

1) F. H. Schofield, Coll. Res. Nat. Phys. Lab. 19. S. 39. 1926.

2) W. Jäger u. H. Diesselhorst, a. a. O.

3) F. A. Schulze, Phys. Ztschr. 12. S. 1028. 1911.

4) R. Schenck, a. a. O.

Für AuPd und AuPt (Tab. 4 und Fig. 4) bewährt sich die isotherme Gerade bis zu $\frac{q}{T} = 60 \cdot 10^{-9}$ d. h. bis zu Zusätzen von ungefähr 20 Gewichts-Prozent Pt und 30 Gewichts-Prozent Pd. Der Zahlenwert $Z = 2,57 \cdot 10^{-8}$ ist genau derselbe, den Grüneisen und Goens¹⁾ aus der für kleinere Zusätze geltenden Geraden ableiten.

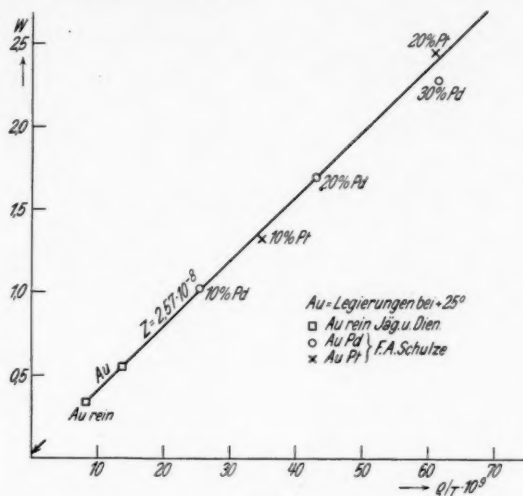


Fig. 4

Tabelle 4

Au-Legierungen bei +25°; $Z = 2,57 \cdot 10^{-8}$; $a = 0,02$

Zusatz in Gew.-%	Beobachter	$\frac{q}{T} \cdot 10^9$	$w_{\text{beob.}}$	$w_{\text{ber.}}$
Au II	Jäger u. D.	8,30	0,34	0,34
Au I	"	13,75	0,55	0,55
Pd 10	F. A. Schulze	25,3	1,02	1,01
20	"	42,9	1,70	1,70
30	"	61,4	2,27	2,42
40	"	83,3	2,50	3,27
Pt 10	F. A. Schulze	34,8	1,32	1,38
20	"	61,0	2,44	2,40
30	"	96,7	3,34	3,78

1) E. Grüneisen u. E. Goens, a. a. O.

Die Ag-Legierungen der Tab. 5 dagegen lassen sich nicht alle in dieselbe Isotherme (Fig. 5) einordnen. AgTl und AgPt liegen für kleinere Zusätze befriedigend auf der Geraden $Z = 2,8 \cdot 10^{-8}$, die Ag-Pd-Punkte aber fallen sämtlich erheblich tiefer unter die Gerade mit $Z = 2,8 \cdot 10^{-8}$, als es den Meßfehlern entspricht. Diese Abweichungen von der Regel der

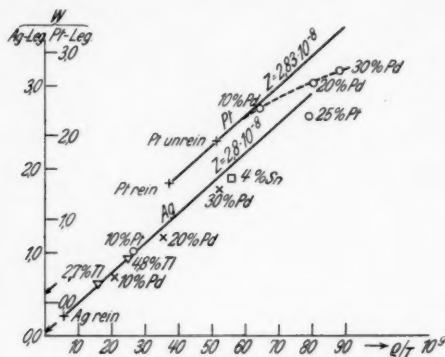


Fig. 5. Ag- und Pt-Legierungen bei $+25^\circ$

isothermen Geraden, die auch bei PtPd (Fig. 5, Tab. 6) auftreten, mögen mit den besonderen Eigenschaften des Palladiums zusammenhängen.

Tabelle 5

Ag-Legierungen bei $+25^\circ$ $Z = 2,8 \cdot 10^{-8}$; $a = 0,04$

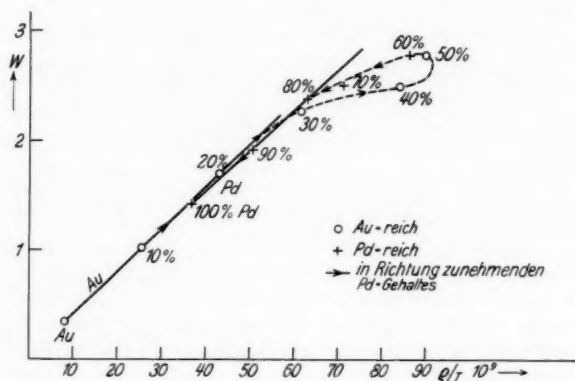
Zusatz in Gew.-%	Beobachter	$\frac{e}{T} \cdot 10^9$	$w_{\text{beob.}}$	$w_{\text{ber.}}$
Ag rein	Jäger u. D.	5,57	0,238	0,238
Pd 10	F. A. Schulze	20,8	0,71	0,78
20	"	35,5	1,19	1,31
30	"	52,2	1,76	1,90
Tl 2,7	Schenk	15,9	0,63	0,61
4,8	"	24,8	0,93	0,93
Sn 4,0	Schenk	55,7	1,89	2,03
Pt 10	F. A. Schulze	26,3	1,02	0,98
25	"	79,1	2,63	2,86

In Fig. 6 schließlich sind als Beispiel für eine vollständige Legierungsreihe die Messungen von F. A. Schulze

Tabelle 6

Pt-Legierungen bei $+25^\circ$; $Z = 2,83 \cdot 10^{-8}$; $a = 0,12$

Zusatz in Gew.-%	Beobachter	$\frac{q}{T} \cdot 10^9$	$w_{\text{beob.}}$	$w_{\text{ber.}}$
Pt rein	Jäger u. D.	37,2	1,43	1,43
" "	"	51,4	1,93	1,93
Pd 10	F. A. Schulze	64,5	2,33	2,40
20	"	80,4	2,63	2,94
30	"	88,2	2,78	3,23

Fig. 6. AuPd-Legierungsreihe bei $+25^\circ$ nach F. A. Schulze; die reinen Komponenten nach Jäger und Diesselhorst

an AuPd wiedergegeben. Auch für Pd gilt, wie aus der Figur ersichtlich, die Regel der isothermen Geraden bis zu Zusätzen von 20—30 Gewichts-Prozenten Au. Z_{Pd} hat ungefähr den Wert $2,7 \cdot 10^{-8}$. Sowohl die Au- wie die Pd-Isotherme biegen beide bei mehr als 20 Gewichts-Prozenten Fremdmetallzusatz nach unten ab und verlaufen in eine Schleife, deren genaue Gestalt aus den wenigen Punkten nicht ermittelt werden kann. Es ist bemerkenswert, daß diese Abweichung von den Isothermen erfolgt, obwohl die Au- und Pd-Gerade annähernd gleiche Neigung haben¹⁾.

1) Über den Versuch, die Abweichungen von der isothermen Geraden auf Gitterleitung zurückzuführen, vgl. E. Grüneisen und H. Reddemann in der bald in den Ann. d. Phys. erscheinenden Arbeit.

Zusammenfassung

Für die in dieser Mitteilung unter dem Gesichtspunkt der Regel der „isothermen Geraden“ zusammengestellten Legierungen von Cu, Al, Au, Ag, Pt und Pd mit anderen Metallen ergab sich folgendes:

1. Die Neigungskonstante Z der isothermen Geraden ist *praktisch* unabhängig von der Art des Zusatzes bis zu einer gewissen Größe des spezifischen elektrischen Widerstandes. (Eine Ausnahme scheinen AgPd und PtPd zu bilden.)

2. Oberhalb dieses Widerstandswertes können für gewisse Zusätze Abweichungen von der Linearität zwischen ρ und w auftreten, während bei anderen Legierungen ρ und w weit über diese Grenze hinaus einander proportional bleiben.

3. Die Regel der „isothermen Geraden“ ermöglicht demnach in ihrem Gültigkeitsbereich eine Berechnung des Widerstandes aus dem leicht zu messenden elektrischen Widerstand, so daß die schwierige Wärmeleitungsmessung vermieden werden kann.

4. Solange elektrische und thermische Widerstandserhöhung einander proportional sind, gilt die *Norbury'sche Beziehung* auch für den *Wärmewiderstand*.

Herrn Prof. Grüneisen bin ich zu großem Dank für die Anregung zu dieser Arbeit und seine Unterstützung bei ihrem Fortgang verpflichtet. Der Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft danke ich für die Bewilligung eines Forschungsstipendiums.

Marburg-Lahn, Phys. Inst. d. Universität, 6. April 1934.

(Eingegangen 10. Juni 1934)

**Die Berechnung der vertikalen Komponente
des Magnetfeldes in der Nähe eines vertikalen
magnetischen Dipols, der auf der Grenzfläche
zweier verschiedener Medien liegt**

Von W. Nunier

Folgende Durchrechnungen schließen sich an die bekannten Entwicklungen von A. Sommerfeld¹⁾ an. In dem speziellen Fall des vertikalen magnetischen Dipols, der auf der Erdoberfläche liegt²⁾, hat A. Sommerfeld auf die vollständige Durchrechnung verzichtet, weil dieser für die Übermittlung der drahtlosen Signale nicht in Frage kommt. Aus demselben Grunde hat auch M. J. O. Strutt³⁾ in seinen ausgedehnten Untersuchungen über die Strahlungen von Antennen unter dem Einfluß der Erdbodeneigenschaften bei dem vertikalen magnetischen Dipol *nur* den maximalen Wert der Hertzschen Funktion Π , d. h. für den Elevationswinkel, bei dem die Strahlung in die Erde ein Maximum aufweist (a. a. O. 2, S. 381), in großer

$$(|k_2| \sqrt{r^2 + z^2} \gg 1)$$

Entfernung vom Dipol angegeben, woraus man den Vektor von Poynting (aber nicht E und H) erhält.

Ebenso hat V. Fock⁴⁾ für den auf der Erde liegenden magnetischen Dipol ($d \ll \frac{\lambda}{4}$) die Π -Funktion berechnet (vgl. S. 526) nur für große numerische Entfernung ($|k_2 r| \gg 1$, $z \ll r$;

1) A. Sommerfeld bei P. Frank u. R. v. Mises, Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, Bd. II. S. 565. Gl. (4). Braunschweig 1927.

2) Dies bedeutet nach den in folg. Anm. 3 zitierten Untersuchungen von M. J. O. Strutt, daß der Abstand d des elektrischen Dipols von der Erdoberfläche $\ll \lambda/4$ genauer $|k_2 d| \ll 1$ (Ann. d. Phys. [5] 17. S. 380. 1933).

3) M. J. O. Strutt, Ann. d. Phys. 1929 [5] A. S. 721—750, B. S. 751 bis 772. 1930, C. S. 1—16; 1931, D. S. 67—91; 1933, E. S. 376—384

4) V. Fock, Ann. d. Phys. [5] 17. S. 401—420. 1933. Es ist $\Pi_{z=0}$ und $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right)_{z=0}$ gegeben, aber noch nicht $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2}$, so daß H noch nicht berechenbar.

II. $r \ll \lambda$, $z \ll r$). Balth. van den Pol und K. F. Niessen¹⁾ haben die Π -Funktion in großer Entfernung für alle Elevationswinkel z/r angegeben, die für den Spezialfall $z^2 \ll r^2$ mit dem Ausdruck von Sommerfeld²⁾ und V. Fock (vgl. S. 526) übereinstimmt.

Um die in die Erde eindringenden elektromagnetischen Raumwellen eines vertikalen magnetischen Dipols für die Messung des elektrischen Widerstandes im Erdinnern zu berechnen, ist es notwendig, die Π -Funktion zunächst für beliebige z -Werte zu entwickeln, um darauf die magnetische Feldstärke³⁾ berechnen zu können.

$$(1) \quad H = k^2 \Pi + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2},$$

wobei für das Folgende gilt:

$$\text{für den nicht leitenden Halbraum: } k^2 = k_1^2 = \frac{\omega^2}{c^2}; \quad \Pi = \Pi_1,$$

$$\text{für den leitenden Halbraum (Erde): } k^2 = k_2^2 = \frac{\varepsilon \omega^2 + i \sigma \omega}{c^2};$$

$$\Pi = \Pi_2.$$

Für den leitenden Halbraum hat J. G. Elias⁴⁾ das von A. Sommerfeld angegebene Integral für Π_2 weiter behandelt und die Lösung einzelner Teilintegrale von Π_2 angegeben. Im folgenden soll nun mittels dieser Teillösungen die Gesamtlösung von Π_2 als Funktion von z entwickelt werden. Da aber praktisch nur im Luftraum gemessen werden kann, muß man nicht Π_2 , sondern Π_1 kennen, was anschließend mittels der von J. G. Elias angegebenen Lösungsmethode hergeleitet wird. Es wird dann gezeigt, daß für $z = 0$ $\Pi_1 = \Pi_2$ ist, und daß auch die Formeln für das Magnetfeld im Luftraum und im leitenden Halbraum an der Trennungsfläche ineinander übergehen, wie es die Grenzbedingungen verlangen, da die Permeabilität zu beiden Seiten gleich ist.

I. Die vertikal magnetische Komponente in der Dipolachse ($r = 0$)

1. Berechnung der Π -Funktion und Angabe von H , im leitenden Halbraum

A. Sommerfelds Endformeln⁵⁾ für die Π -Funktion lauten:

1) Balth. van den Pol, *Ztschr. f. Hochfrequenztechnik* **37**. S. 152. 1931.

2) A. Sommerfeld, *Ann. d. Phys.* **28**. S. 287. 1909; **81**. S. 1135. 1926.

3) a. a. O., **II**. S. 564.

4) J. G. Elias, *Physica*, 2. Jahrg. 1922. N. F. S. 207—216; Nr. 12. S. 361—374.

5) Riemann-Weber, *Bd. II*, S. 565, Gl. (4).

$$(2a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Pi_1 = 2 \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) \cdot \exp.(-z \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}) \lambda d\lambda \\ : [\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} + \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}]; \quad z > 0. \end{array} \right.$$

$$(2b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Pi_2 = 2 \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) \exp.(+z \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}) \lambda d\lambda \\ : [\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} + \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}]; \quad z < 0. \end{array} \right.$$

Gl. (2b) hat J. G. Elias umgeformt:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Pi_2 = \frac{2}{k_1^2 - k_2^2} \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) \exp.(+z \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}) \lambda d\lambda \\ \cdot [\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} - \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}]. \end{array} \right.$$

Es sei nun $\Pi_2 = L_1 + L_2$, wobei:

$$(4) \quad L_1 = \frac{2}{k_1^2 - k_2^2} \cdot \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) \exp.(z \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}) \cdot \sqrt{\lambda^2 - k_2^2} \lambda d\lambda,$$

oder:

$$(5) \quad L_1 = \frac{2}{k_1^2 - k_2^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\exp.(i k_2 R)}{R}.$$

Das zweite Integral ergibt mit der Substitution:

$$(6) \quad \sqrt{\lambda^2 - k_1^2} = t \quad \text{und} \quad k_2^2 - k_1^2 = a^2.$$

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} L_2 = - \frac{2}{k_1^2 - k_2^2} \cdot \int_{i k_1}^{\infty} J_0(r \sqrt{t^2 + k_1^2}) \exp.(z \sqrt{t^2 - a^2}) t^2 dt, \\ (z < 0). \end{array} \right.$$

Es sei weiter:

$$(8) \quad L_2 = L_{21} + L_{22},$$

wobei L_{21} das Integral mit den Grenzen $i k_1$ bis 0 und L_{22} das Integral mit den Grenzen 0 bis ∞ bedeuten.

Da

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_0^{\infty} J_0(r \sqrt{t^2 + k_1^2}) \exp.(z \sqrt{t^2 - a^2}) dt \\ = \int_0^{\infty} J_0(r \sqrt{t^2 + k_1^2}) \exp.(z \sqrt{t^2 - a^2}) \cdot (t^2 - a^2) dt \end{array} \right.$$

ist, so ist

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} L_{22} &= -\frac{2}{k_1^2 - k_2^2} \left(a^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \\ &\cdot \int_0^\infty J_0(r \sqrt{t^2 + k_1^2}) \exp.(z \sqrt{t^2 - a^2}) dt^1. \end{aligned} \right.$$

Da

$$(11) \quad J_0(r \sqrt{t^2 + k_1^2}) = J_0(r k_1) - \frac{r^2 t^2}{2 \cdot 1!} \cdot \frac{J_1(r k_1)}{r k_1} + \dots$$

und die Berechnung für $|z| > r = 0$ erfolgen soll, kann man sich auf das 1. Glied beschränken, welches gleich 1 ist für $r = 0$.

Nach Gl. (38) der Abhandlung ist für

$$|ar| < 1, \quad |k_1 r| \ll 1 \quad \text{und} \quad |z| \gg r$$

$$(12) \quad L_{22} = -\frac{2}{k_1^2 - k_2^2} \left(a^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\pi a i}{2} H_1^{(1)}(az),$$

wobei $H_1^{(1)}$ die von Hankel eingeführte komplexe Funktion 3. Art bedeutet mit der Beziehung:

$$(13) \quad H_1^{(1)} = J_1 + i N_1,$$

wobei J_1 die Besselsche Funktion 1. Art und

$$N_1 = \frac{2}{\pi} \left[Y_1 - J_1 \ln \frac{2}{\gamma} \right];$$

$$\gamma = 1,7811 \quad \text{und} \quad Y_1 = J_1 - \frac{1}{az} J_0 + \frac{3}{2} J_3 - \dots$$

Ferner ist: $H_0^{(1)'} = J_0' + i N_0' = -H_1^{(1)}$ (vgl. Jahnke und Emde, S. 90–95).

Die Berechnung von L_{21} ergibt, da nach Taylor

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \exp.(z \sqrt{t^2 - a^2}) &= \exp.(iz a) \\ &\cdot \left[1 + \frac{t^2}{2!} \frac{z}{-ia} + \frac{t^4}{4!} \left(\frac{3z^2}{-a^2} - \frac{3z}{ia^3} \right) + \dots \right] \end{aligned} \right.$$

ist und $t = i k_1 \cos \varphi$ gesetzt wird:

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} L_{21} &= \frac{2}{k_1^2 - k_2^2} \cdot \int_0^{\pi/2} J_0(r k_1 \sin \varphi) \exp.(iz a) \\ &\cdot \left[1 - \frac{z k_1^2}{2!} \cos^2 \varphi + \dots \right] \cdot i k_1^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi^2. \end{aligned} \right.$$

1) Die entsprechende Gleichung in der Abhandlung von J. G. Elias (S. 362) ist verdruckt.

2) In der Abhandlung von J. G. Elias verdruckt.

Die Reihenentwicklung von L_{21} [Gl. (15)] konvergiert rasch, wenn $\left| \frac{z k_1^3}{a} \right| \ll 1$ ist. Die Lösung erfolgt durch eine von Niels Nielsen¹⁾ angegebene Formel, die für die Besselsche Funktion mit dem Index Null lautet:

$$(16) \quad \int_0^{\pi/2} J_0(x \sin \varphi) \cos^{2e-1} \varphi \sin \varphi d\varphi = \frac{\Gamma(e) 2^{e-1}}{x^e} \cdot J_e(x).$$

Da

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}; \quad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

ist, so ist die Lösung von Gl. (15) für die ersten beiden Glieder gegeben durch:

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} L_{21} &= \frac{\sqrt{2} \pi i k_1^3 \exp.(i z a)}{k_1^3 - k_2^3} \\ &\cdot \left[\frac{J_{3/2}(r k_1)}{r^{3/2} k_1^{3/2}} - \frac{3 z k_1^2}{2 i a} \cdot \frac{J_{5/2}(r k_1)}{r^{5/2} k_1^{5/2}} + \dots \right]^2. \end{aligned} \right.$$

L_{21} soll für $r=0$ gebildet werden; der Grenzwert des 1. Gliedes mit der Besselschen Funktion vom Index $3/2$ ergibt:

$$(18) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{J_{3/2}(r k_1)}{r^{3/2} k_1^{3/2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{\sin(r k_1)}{(r k_1)^3} - \frac{\cos(r k_1)}{(r k_1)^2} \right] = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Der Grenzwert des 2. Gliedes ergibt:

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{J_{5/2}(r k_1)}{r^{5/2} k_1^{5/2}} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{r \rightarrow 0} \\ &\cdot \left[\frac{\left(\frac{3}{(r k_1)^3} - 1 \right) \sin(r k_1)}{(r k_1)^5} - \frac{3}{(r k_1)^4} \cos(r k_1) \right] = \frac{1}{15} \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \end{aligned} \right.$$

Demnach ist:

$$(20) \quad L_{21} = \frac{2 i k_1^3 \exp.(i z a)}{3(k_1^3 - k_2^3)} + \frac{k_1^5 z \exp.(i z a)}{5(k_1^3 - k_2^3)^{3/2}} + \dots$$

Nach den Gl. (2b), (5), (8), (12), (20) ist dann Π_2 gegeben durch:

1) Niels Nielsen, Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen. Leipzig 1904, Formel 3, S. 222.

2) Die entsprechende Gleichung der Abhandlung von J. G. Elias ist anders angegeben; im 1. Glied darf der Faktor 3, im zweiten der Faktor 5 nicht stehen.

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \Pi_2 &= \frac{2}{k_1^2 - k_2^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\exp.(i k_2 R)}{R} \right)_{r=0} + \frac{2}{3} \frac{i k_1^3 \exp.(i z a)}{k_1^2 - k_2^2} \\ &+ \frac{k_1^5 z \exp.(i z a)}{5 \cdot (k_2^2 - k_1^2)^{1/2}} + \pi a i H_1^{(1)}(a z) + \frac{\pi i}{a} \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} \cdot H_1^{(1)}(a z); \\ &(a^2 = k_2^2 - k_1^2). \end{aligned} \right.$$

Nach Gl. (1) lautet dann die Formel für das Magnetfeld im leitenden Halbraum ($z < 0$) in der Dipolachse ($r = 0$) und kleine Aufpunktstände z in der Nähe des Dipols:

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} H_z^{(2)} &= k_2^2 \Pi_2 + \frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial z^2} = \frac{2 k_2^2}{k_1^2 - k_2^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\exp. \cdot (i k_2 R)}{R} \right)_{r=0} \\ &+ \frac{2 i k_1^3 k_2^2 \exp.(i z a)}{3 (k_1^2 - k_2^2)} + \frac{k_2^2 k_1^5 z \cdot \exp.(i z a)}{5 (k_2^2 - k_1^2)^{1/2}} \\ &+ k_2^2 (k_2^2 - k_1^2)^{1/2} \pi i H_1^{(1)} a z + \frac{k_2^2 \pi i}{(k_2^2 - k_1^2)^{1/2}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} \cdot H_1^{(1)}(a z) \\ &+ \frac{2}{k_1^2 - k_2^2} \cdot \frac{\partial^4}{\partial z^4} \left(\frac{1}{R} \exp.(i k_2 R) \right)_{r=0} \\ &+ \frac{2 i k_1^3}{3 (k_1^2 - k_2^2)} \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} \cdot \exp.(i z a) + \frac{k_1^5}{5 (k_2^2 - k_1^2)^{3/2}} \\ &\quad \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} \cdot (z \exp.(i z a)) \\ &+ (k_2^2 - k_1^2)^{1/2} \pi \frac{\partial^2}{\partial z^2} H_1^{(1)}(a z) + \frac{\pi i}{(k_2^2 - k_1^2)^{1/2}} \\ &\quad \cdot \frac{\partial^4}{\partial z^4} \cdot H_1^{(1)}(a z) \end{aligned} \right.$$

mit den Bedingungen

$$1. |z| > 0, \quad 2. |k_2 z| < 1, \quad 3. |r k_2| \ll 1.$$

2. Berechnung der Π_1 -Funktion in der Dipolachse ($r = 0$);
Bildung der Formel für das Magnetfeld im Luftraum
für kleine z

Zu diesem Zweck formt man Gl. (2a) genau so um wie Gl. (2b). Ferner sei entsprechend wie früher eingeführt:

$$(23) \quad \Pi_1 = M_1 + M_2,$$

wobei dann

$$(24) \quad M_1 = - \frac{2}{k_1^2 - k_2^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{R} \exp.(i k_1 R) \right)$$

und

$$(25) \quad M_2 = \frac{2}{k_1^2 - k_2^2} \cdot \int_0^\infty J_0(\lambda r) \exp.(-z \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}) \cdot \sqrt{\lambda^2 - k_2^2} \lambda d\lambda.$$

Durch die Substitutionen:

$$(26) \quad z = -z_1; \quad b^2 = k_1^2 - k_2^2; \quad \sqrt{\lambda^2 - k_2^2} = t$$

wird Gl. (25) auf dieselbe Form gebracht wie Gl. (7):

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} M_2 &= \frac{2}{k_1^2 - k_2^2} \int_{ik_2}^\infty J_0(r \sqrt{t^2 + k_2^2}) \exp.(z_1 \sqrt{t^2 - b^2}) t^2 dt; \\ z_1 &< 0. \end{aligned} \right.$$

Es soll ferner entsprechend Gl. (8) $M_2 = M_{21} + M_{22}$ sein. Dann ist nach Gl. (12)

$$(28) \quad M_{22} = \frac{2}{k_1^2 - k_2^2} \left(b^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \right) \frac{b i \pi}{2} \cdot H_1^{(1)}(b z_1)$$

oder nach Gl. (26), da $b^2 = k_1^2 - k_2^2 = -a^2$ ist:

$$(29) \quad M_{22} = -a \pi H_1^{(1)}(i a z) + \frac{\pi}{a} \frac{\partial^2}{\partial z^2} H_1^{(1)}(i a z).$$

Das Integral M_{21} mit den Grenzen ik_2 bis 0 wird entsprechend den Gl. (14) und (15) gelöst. Danach ist:

$$(30) \quad M_{21} = -\frac{1}{k_1^2 - k_2^2} \left[\frac{2}{3} i k_2^3 \exp.(i z_1 b) - \frac{1}{5} k_2^5 z_1 \exp.(i z_1 b) \right]$$

oder da $b = i a$ und $z = -z_1$ ist,

$$(31) \quad M_{21} = \frac{2 i k_2^3}{3(k_2^2 - k_1^2)} \exp.(z a) - \frac{i k_2^5 z}{5(k_2^2 - k_1^2)^{3/2}} \exp.(z a).$$

Nach Gl. (24), (28), (31), (32) ist dann:

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{2}{k_2^2 - k_1^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{R} \exp.(i k_1 R) \right) + \frac{2 i k_2^3}{3(k_2^2 - k_1^2)} \exp.(z a) \\ &\quad - \frac{i k_2^5 z}{5(k_2^2 - k_1^2)^{3/2}} \exp.(z a) - a \pi H_1^{(1)}(i a z) + \frac{\pi}{a} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ &\quad \cdot H_1^{(1)}(i a z); \quad z > 0. \end{aligned}$$

Nach Gl. (1) ist dann das Magnetfeld im Luftraum gegeben durch:

$$\begin{aligned}
 (33) \quad \left\{ \begin{aligned}
 H_z^{(1)} &= k_1^2 H_1 + \frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2} = \frac{2k_1^2}{k_2^2 - k_1^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \cdot \left(\frac{1}{R} \exp. (i k_1 R) \right)_{r=0} \\
 &+ \frac{2i k_1^2 k_2^2}{3(k_2^2 - k_1^2)} \cdot \exp. (z a) - \frac{i k_1^2 k_2^5 z}{5(k_2^2 - k_1^2)^{3/2}} \exp. (z a) \\
 &+ k_1^2 \pi (k_2^2 - k_1^2)^{1/2} \cdot H_1^{(1)}(i a z) \\
 &\quad - \frac{k_1^2 \pi}{(k_2^2 - k_1^2)^{1/2}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} H_1^{(1)}(i a z) \\
 &+ \frac{2}{k_2^2 - k_1^2} \frac{\partial^4}{\partial z^4} \left(\frac{1}{R} \exp. (i k_1 R) \right)_{r=0} \\
 &\quad + \frac{2i k_2^2}{3(k_2^2 - k_1^2)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \exp. (z a) \\
 &- \frac{i k_2^5}{5(k_2^2 - k_1^2)^{1/2}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (z \cdot \exp. (z a)) - (k_2^2 - k_1^2)^{1/2} \pi \\
 &\quad \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} H_1^{(1)}(i a z) + \frac{\pi}{(k_2^2 - k_1^2)^{1/2}} \frac{\partial^4}{\partial z^4} H_1^{(1)}(i a z).
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

3. Die 90°-Komponente des Magnetfeldes im Luftraum [Vereinfachung von Gl. (22) und (33)]; numerische Diskussion

Da das Magnetfeld in der Dipolachse $r = 0$ untersucht werden soll, so sind für einen Aufpunktabstand, bei dem nach Gl. (40) mit Versuchsfehler von 10% $|k_2 z| \leq 10^{-1}$ ist, also $z \leq 10^3$ bis 10^4 cm die Bedingungen 1. und 3. von Gl. (22) erfüllt. Ferner sollen die Versuchsbedingungen so gewählt sein, daß k_1^2 gegen k_2^2 vollständig vernachlässigt werden kann. Nach Gl. (6) ist dann die Größe $a = k_2$ und wenn nun k_2 von der Größenordnung 10^{-5} ist¹⁾, so ist die 2. Bedingung von Gl. (22) erfüllt für $z \leq 10^3$ cm. Die Glieder $k_2^4 z$ ergeben für die z -freien Glieder k_2^3 dann nur eine Korrektur von $\leq 10\%$.

1) Nach Gl. (1) ist $k_1^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$; für $\nu = 300$ Hz ist (vgl. S. 514) $k_1^2 = 3,9 \cdot 10^{-15}$; da ferner die in der Sommerfeldschen Durchrechnung zugrunde gelegte Leitfähigkeit $\sigma = 4\pi c^2 \sigma_{\text{mag.}}$ ist, so ist

$$k_2^2 = \frac{\varepsilon \omega^2}{c^2} + i 4\pi \sigma_{\text{mag.}} \omega$$

(k_2 hat die Dimension cm^{-1}). Für einen spezifischen Widerstand der Erde, z. B. $\rho = 2 \cdot 10^4 \Omega \text{ cm}$, ist $\sigma_{\text{mag.}} = 5 \cdot 10^{-14} \text{ cm}^{-2} \text{ sec}$, und z. B. für $\varepsilon = 20$ ist $k_2^2 = 1,2 \cdot 10^{-9}$; d. h. k_2 ist von der Größenordnung 10^{-5} ; k_1^2 ist dann gegen k_2^2 zu vernachlässigen. Hierzu ist zu bemerken, daß wesentliche Beiträge zu H_z aus relativ großen Tiefen (in diesem Beispiel wohl etwa 2–10 km) kommen. In diesen Tiefen ist aber $\rho \approx 10^4$.

Um die Formel für das Magnetfeld in der Dipolachse zu erhalten, ist es nötig, die in Gl. (33) vorkommenden Differentialquotienten der Exponential- und Hankelschen Funktionen zu bilden und nachher für $r = 0$ zu spezialisieren.

Es gilt allgemein für beliebige k

$$(34) \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{R} \exp. (i k R) \right)_{r=0} = \left(\frac{2}{z^3} - \frac{2 i k}{z^2} - \frac{k^2}{z} \right) \exp. (i k z),$$

$$(35) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^4}{\partial z^4} \left(\frac{1}{R} \exp. (i k R) \right)_{r=0} \\ = \left(\frac{24}{z^5} - \frac{24 i k}{z^4} - \frac{12 k^2}{z^3} + \frac{4 i k^3}{z^2} + \frac{k^4}{z} \right) \exp. (i k z). \end{aligned} \right.$$

Die Hankelschen Funktionen mit jeweiliger Berücksichtigung des 1. Gliedes und Vernachlässigung aller höheren Potenzen von z lauten:

$$(36a) \quad \left\{ \begin{aligned} H_1^{(1)}(i k z) &= \frac{i k z}{2} + \frac{2 i}{\pi} \left[\frac{i k z}{2} \left(\frac{3}{2} - \ln \frac{2}{\gamma} \right) - \frac{1}{i k z} \right]; \\ \gamma &= 1,7811, \end{aligned} \right.$$

$$(36b) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} H_1^{(1)}(i k z) &\equiv H_1^{(1)''}(i k z) \\ &= -k^2 \left(-\frac{3}{8} i k z + \frac{2 i}{\pi} \left[-\frac{3}{8} i k z \left(1 \frac{1}{8} - \ln \frac{2}{\gamma} \right) - \frac{2}{(i k z)^3} \right] \right), \end{aligned} \right.$$

$$(36c) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^4}{\partial z^4} H_1^{(1)}(i k z) &\equiv H_1^{(1)(4)}(i k z) \\ &= k^4 \left(\frac{5}{16} i k z + \frac{2 i}{\pi} \left[\frac{5}{16} i k z \left(\frac{1}{4} - \ln \frac{2}{\gamma} \right) - \frac{24}{(i k z)^5} \right] \right). \end{aligned} \right.$$

Die Formel Gl. (33) für die vertikale Komponente des Magnetfeldes im Luftraum wurde entwickelt, um sie für die Messung des elektrischen Widerstandes im Erdinnern verwenden zu können. Gemessen wird ihr imaginärer Teil, die 90°-Komponente des Magnetfeldes der induzierten Ströme¹⁾. [Der imaginäre Teil von Gl. (33) entspricht dieser 90°-Komponente.] Bei den Bedingungen $k_1^2 \ll k_2^3$ und $z \leq 10^3$ bis 10^4 cm kann man sich darauf beschränken, das z -freie Glied (k_2^3) und das Glied mit der 1. Potenz von z ($k_2^4 z$) auszurechnen; die Glieder $k_1^2 \cdot k_2^2 z$, $k_1 \cdot k_2^3 z$ usw. sind dann gegen k_2^3 und $k_2^4 z$ zu vernachlässigen.

Die imaginären Glieder der ersten sechs Ausdrücke in Gl. (33) sind bei den obigen Bedingungen gegenüber k_2^3 zu vernachlässigen, wie sofort ersichtlich.

1) W. Nunier, Ztschr. f. angew. Geophysik 3. S. 370ff. 1933.

Die imaginären Teile der anderen Glieder lauten (vom 7. Glied):

$$(37) \quad \begin{cases} \mathfrak{G}_7 = \frac{2}{3} k_2^3 i + \frac{2}{3} k_2^4 z i; & \mathfrak{G}_8 = -\frac{2}{5} k_2^3 i - \frac{3}{5} k_2^4 z i \\ \mathfrak{G}_9 = \frac{3}{8} \pi k_2^4 z i; & \mathfrak{G}_{10} = -\frac{5\pi}{16} k_2^4 z i. \end{cases}$$

Durch Addition erhält man den Ausdruck für die 90°-Komponente:

$$(38) \quad \begin{cases} H_{90}^{(1)} = \frac{4}{15} k_2^3 - \left(\frac{\pi}{16} - \frac{1}{15} \right) k_2^4 z + \dots [\text{cm}^{-3}]; \\ \text{im Luftraum } z > 0. \end{cases}$$

Die Formel für die 90°-Komponente des Magnetfeldes im leitenden Halbraum gewinnt man aus Gl. (22). Für dieselben Bedingungen lauten die jeweiligen imaginären Teile der einzelnen Glieder:

$$(39) \quad \begin{cases} \mathfrak{G}_1 = \frac{2}{3} k_2^3 i - \frac{1}{5} k_2^5 z^2 i; & \mathfrak{G}_4 = \frac{\pi}{2} k_2^4 z i; \\ \mathfrak{G}_5 = -\frac{3}{8} \pi k_2^4 z i; & \mathfrak{G}_6 = -\frac{2}{5} k_2^3 i + \frac{1}{5} k_2^5 z^2 i; \\ \mathfrak{G}_9 = -\frac{3}{8} \pi k_2^4 z i; & \mathfrak{G}_{10} = \frac{5}{16} \pi k_2^4 z i. \end{cases}$$

(Die Beiträge des 2., 3., 7. und 8. Gliedes sind zu vernachlässigen.) Durch Addition erhält man die 90°-Komponente des Magnetfeldes der induzierten Ströme für kleine Aufpunkt-abstände im leitenden Halbraum.

$$(40) \quad H_{90}^{(2)} = \frac{4}{15} k_2^3 + \frac{\pi}{16} k_2^4 z + \dots [\text{cm}^{-3}]; \quad z < 0.$$

Für sehr kleine z -Werte stimmen also die beiden Werte der 90°-Komponente Gl. (38) und (40) überein; insbesondere für $z = 0$ ist:

$$(40 \text{ a}) \quad H_{90}^{(1)} = H_{90}^{(2)} = \frac{4}{15} k_2^3 \cdot [\text{cm}^{-3}],$$

wie es auch wegen der Stetigkeit sein muß.

4. Ergänzung

Die Formel Gl. (40) [oder (38)] für das Magnetfeld muß noch mit dem maximalen Moment p des Dipols multipliziert werden. Das Moment (Fläche mal Stromstärke der Dipolspule) ist

$$(41) \quad p = R^2 \pi N J \cdot 10^{-1} \sqrt{4\pi},$$

wobei R = Radius, N = Windungszahl der einlagigen Spule¹⁾, J = in Ampere gemessen, $\sqrt{4\pi}$ Umrechnungsfaktor²⁾. Bei den Versuchsbedingungen $R = 50$ cm, $N = 200$, $J = 1$ Amp. ergibt das Moment p den Wert:

$$(42) \quad p = 5,3 \cdot 10^{-5} [\text{Amp. cm}^2].$$

Für $r = 300$ H, $\epsilon = 20^3$) und den spezifischen Widerstand der Erde $\rho = 2 \cdot 10^4 \Omega \text{ cm}^4$) ist $k_2 = \sqrt{4\pi \sigma_{\text{mag}} \cdot 2\pi r} = 3,4 \cdot 10^{-5} [\text{cm}^{-1}]$ (vgl. Anm. S. 520).

Für einen Aufpunkt Abstand $z \leq 2 \cdot 10^2$ cm ist für die obigen Bedingungen das zweite Glied in Gl. (38) zu vernachlässigen; mit Gl. (41), (42) erhält man daraus:

$$(43) \quad H_{90^\circ} = p \cdot \frac{4}{15} k_2^3 = 0,6 \cdot 10^{-7} \text{ Oe.}^5).$$

Zu dieser Dipolwirkung der Spule addiert sich aber noch die Induktionswirkung der Spule, aufgefaßt als Kreisstrom vom endlichen Radius [a. a. O., S. 521, Gl. (1)]. Danach ist:

$$(44) \quad H_{90^\circ} = 8,3 \cdot 10^{-9} \nu R N \cdot J : \rho = 10^{-10} \nu \cdot 8\pi^3 R \cdot N \cdot J : 3 \rho.$$

Da der Aufpunkt Abstand $z = 2 \cdot 10^2$ cm = $4 R$ gewählt wurde, so ist nach J. Koenigsberger⁶⁾ vom Gesamtwert [Gl. (44)] nur

1) Um die 90° -Komponente des Magnetfeldes messen zu können, ist es notwendig, zuerst das Primärfeld auf etwa 10^{-7} abzukompensieren, was bei mehrlagigen Spulen sehr schwierig ist. Ein Grund für diese experimentell bekannte Tatsache ist der, wie mir scheint, daß bei mehreren Lagen leicht ein kapazitiver Kurzschluß zwischen zwei Lagen eintreten kann und die Isolationsfehler einen störenden Ohmschen Kurzschluß hervorrufen, wodurch eine exakte Kompensation wegen der entstehenden Phasendifferenz nicht möglich ist. Die Hauptsache scheint aber in der vielleicht durch obige Umstände bedingten relativen stärkeren und nicht abkompensierbaren Ausstrahlung zu liegen.

2) a. a. O. Bd. II. S. 405.

3) I. C. Ratcliffe u. W. F. B. Shaw, A determination of the dielectric constant of the ground. Nature 124. S. 617. 1929. Nr. 3129. Die Verfasser stellten auf Grund der Theorie von Sommerfeld (Ann. d. Phys. 28. S. 665—736, 1909) Untersuchungen mit elektrischen Wellen von $\lambda = 30$ m bis 1400 m an und haben für den Wert $\epsilon = 20$ Übereinstimmung mit der Theorie gefunden.

4) Der spezifische Widerstand einzelner Schichten in der Erde ist, wie die geophysikalischen Untersuchungen bekanntlich zeigen, sehr verschieden (in Erdschichten mit hohem Wasser- und Salzgehalt $\rho = 10 \Omega \text{ cm}$, in Gegenden mit aridem Klima $\rho = 10^4 \Omega \text{ cm}$). Für einen mäßig feuchten Wiesenboden hat M. J. O. Strutt (E. N. T. 7. 387—393. 1930. Nr. 10) den Wert $\rho = 2 \cdot 10^4 \Omega \text{ cm}$ gemessen, ähnlich wie hier gefunden (a. a. O., S. 10).

5) 1 Oersted = 1 Gauss.

6) J. Koenigsberger, Phys. Ztschr. 31. Jahrg. 1930. S. 487, Gl. (17).

etwa 0,1 in Rechnung zu setzen. Für den vorliegenden Fall beträgt dann $H_{90} = 1,0 \cdot 10^{-7}$ Oe.

Dieser Effekt konnte mit der Versuchsanordnung (a. a. O., S. 521) nicht wahrgenommen werden, da die Induktionswirkungen der magnetischen Variationen (etwa $2 \cdot 10^{-7}$ Oe) von derselben Größenordnung waren. Durch größere R und N läßt sich der Effekt erhöhen. Will man aber nur die reine Dipolwirkung messen, so muß der Aufpunkt Abstand z so groß gewählt werden, daß die Wirkung der Spule als Kreisstrom vom endlichen Radius $H(F)$ weniger als 20% (Meßgenauigkeit) der Dipolwirkung $H(P)$ beträgt. Es soll also sein:

$$(45) \quad H(F) \leq 0,2 H(P).$$

Nach Gl. (42), (43) und (44) ist dann

$$(46) \quad \begin{cases} \frac{10^{-10}}{3\varrho} \cdot \nu \cdot 8\pi^3 R N J (1 - H'_{z=nR}) \\ \leq 0,2 R^2 \pi N J \cdot 10^{-1} \sqrt{4\pi} \frac{4}{15} (4\pi\sigma_{\text{mag}} \cdot 2\pi\nu)^{1/2}, \end{cases}$$

wobei $1 - H'_{z=nR}$ den Korrektionsfaktor bedeutet, wenn der Aufpunkt Abstand z ein bestimmtes Vielfaches (n) vom Primärstromradius (R) ist. H' ist aus Formel 17 der oben zitierten Abhandlung von J. Koenigsberger für beliebige $z = nR$ abzulesen. Da $10^{-9} : \varrho = \sigma_{\text{mag}}$ ist, so geht Gl. (46) über in

$$(47) \quad 1 - H'_{z=nR} \leq 20 \cdot R \sqrt{\sigma_{\text{mag}} \cdot 2\pi\nu}.$$

Aus dieser Bedingungsgleichung erhält man die 2. Bedingung für den Aufpunkt Abstand z , die mit der 1. Bedingung $|k_2 z| < 1$ [vgl. 2. Bedingung von Gl. (22)] gemeinsam erfüllt sein muß.

II. Magnetische vertikale Komponente (90°) auf der Erdoberfläche ($z = 0$) in der Nähe des Dipols ($|k_2 r| < 1$; $z \ll r$).

Die Berechnung kann wieder auf zwei Arten erfolgen:

1. Angabe der Hertzschen Funktion Π_2 im leitenden Halbraum ($z < 0$) mit der späteren Spezialisierung für $z = 0$.
2. Angabe von Π_1 im Luftraum ($z > 0$). Für $z = 0$ wird gezeigt, daß beide Lösungen übereinstimmen.

1. Für die Berechnung von Π_2 , wozu die Teillösungen N_1 , N_{21} und N_{23} (entsprechend L_1 , L_{21} und L_{22}) jetzt für $|r| > z$ angegeben werden müssen, geht man wieder von Gl. (2b) aus.

Die erste Teillösung N_1 bleibt erhalten:

$$(48) \quad N_1 = \frac{2}{k_1^2 - k_2^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{R} \exp. (ik_2 R) \right).$$

Der Teil N_{22} [Gl. (12)] ergibt nach J. G. Elias, Gl. (39), S. 367 für kleine z und $|k_2 r| < 1$ die Lösung

$$(49) \quad \left\{ \begin{aligned} N_{22} = & -\frac{2}{k_1^2 - k_2^2} \left(k_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\pi i k_1^2}{2} \\ & \cdot z \left(\frac{H_1(k_2 r)}{k_2 r} - \frac{k_2^2 z^2}{2} \cdot \frac{H_2(k_2 r)}{k_2^2 r^2} + \dots \right), \end{aligned} \right.$$

da die vorkommenden Besselfunktionen gleich 0 oder 1 werden für $|r k_1| \ll 1$, was erfüllt ist, weil $k_1^2 \ll k_2^2$ sein soll.

In erster Näherung sind die Besselfunktionen

$$J_1(k_2 r) = \frac{k_2 r}{2} \quad \text{und} \quad J_2(k_2 r) = \frac{k_2^2 r^2}{8},$$

weshalb in erster Näherung Gl. (49) mittels Gl. (13) ergibt:

$$(50) \quad \left\{ \begin{aligned} N_{22} = & -\frac{2}{k_1^2 - k_2^2} \left(k_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\pi i k_2^2 z}{2 \cdot 2} - \frac{\pi i k_2^4 z^3}{2 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot 2} + \dots \right) \\ = & 2 \left(\frac{\pi i k_2^2 z}{4} - \frac{\pi i k_2^4 z^3}{4 \cdot 8} \right) + \frac{2}{k_2^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\pi i k_2^2}{4} \left(z - \frac{k_2^2 z^3}{8} \right). \end{aligned} \right.$$

Oder mit Berücksichtigung des dritten Gliedes

$$(51) \quad N_{22} = \frac{\pi i k_2^2}{4} \left(z - \frac{k_2^2 z^3}{8} \right) - \frac{\pi i}{2} \left(\frac{3}{4} k_2^2 z - \frac{5}{48} k_2^4 z^3 \right).$$

Die Lösung von N_{21} [vgl. Gl. (17)] ergibt mittels Gl. (18), (19):

$$(52) \quad \left\{ \begin{aligned} N_{21} = & \frac{\sqrt{2\pi} i k_1^2 \exp.(i z k_2)}{k_1^2 - k_2^2} \\ & \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{30} r^2 k_1^2 - \frac{z k_1^2 \cdot 3}{2 k_2} \left(\frac{1}{15} - \frac{r^2 k_1^2}{120} \right) \right]}. \end{aligned} \right.$$

Dieser Beitrag wird Null, wegen der Bedingungen $k_1^2 \ll k_2^2$ und $|k_2 r| < 1$. Die Gesamtlösung von Π_2 ist daher für kleine z nach Gl. (48) und (51):

$$(53) \quad \left\{ \begin{aligned} \Pi_2 = N_1 + N_{22} = & -\frac{2}{k_2^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{R} \exp.(i k_2 R) \right) \\ & + \frac{\pi i k_2^2}{2} \left(z - \frac{k_2^2 z^3}{8} \right) - \frac{\pi i}{2} \left(\frac{3}{4} k_2^2 z - \frac{5}{48} k_2^4 z^3 \right). \end{aligned} \right.$$

Auf der Erdoberfläche für $z = 0$ ist:

$$(54) \quad \left\{ \begin{aligned} \Pi_2 = & -\frac{2}{k_2^2} \left(\frac{i k_2}{r^2} - \frac{1}{r^3} \right) \exp.(i k_2 R) \\ = & \left(\frac{-2i}{k_1 r^2} + \frac{2}{k_2^2 r^3} \right) \exp.(i k_2 r). \end{aligned} \right.$$

Für große Entfernungen $|k_2 r| \gg 1$ erhält V. Fock¹⁾:

$$(54a) \quad \Pi(r, 0) = -\frac{2i}{k_2 r^2} \exp. (+ i k_2 r),$$

wenn man berücksichtigt, daß sein $k = -i k_2$ ist.

Balth. van der Pol²⁾ integriert Gl. (2), S. 515 für $z = 0$ und erhält für Π den Wert:

$$\begin{aligned} \Pi(r, 0) &= \frac{2}{k_2^2} \cdot \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \exp. (i k_1 r) - \frac{1}{r} \exp. (i k_2 r) \right) \\ &= -\frac{2i}{k_2 r^2} \exp. (i k_2 r), \end{aligned}$$

er ist gleich dem obigen Wert von V. Fock.

Die magnetische vertikale Komponente lautet dann nach Gl. (54) für $z < 0$:

$$(55) \quad \left\{ \begin{aligned} H_z &= k_2^2 \Pi_2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Pi_2 = -2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{R} \exp. (i k_2 R) \right) \\ &+ \frac{\pi i k_2^4}{2} \left(z - \frac{k_2^2 z^3}{8} \right) - \frac{\pi i k_2}{2} \left(\frac{3}{4} k_2^2 z - \frac{5}{48} k_2^4 z^3 \right) \\ &- \frac{2}{k_2^2} \frac{\partial^4}{\partial z^4} \left(\frac{1}{R} \exp. (i k_2 R) \right) \\ &+ \frac{\pi i k_2^3}{2} \frac{\partial^3}{\partial z^3} \left(z - \frac{k_2^2 z^3}{8} \right) \\ &- \frac{\pi i}{2} \frac{\partial^3}{\partial z^3} \left(\frac{3}{4} k_2^2 z - \frac{5}{48} k_2^4 z^3 \right). \end{aligned} \right.$$

Für $z = 0$ ist:

$$(55a) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial^4}{\partial z^4} \left(\frac{1}{R} \exp. (i k_2 R) \right)_{z=0} \\ &= \left(-\frac{3 k_2^2}{r^3} - \frac{9 i k_2}{r^4} + \frac{9}{r^5} \right) \exp. (i k_2 r). \end{aligned} \right.$$

Der imaginäre Teil von Gl. (55) liefert die 90°-Komponente. Das erste Glied von Gl. (55) liefert dazu den Betrag für $z = 0$:

$$\mathcal{G}_1 = \frac{2}{3} k_2^3 - \frac{1}{15} k_2^5 r^2 \text{ [vgl. Gl. (54)];}$$

$$\mathcal{G}_3 = -\frac{2}{5} k_2^3 + \frac{1}{35} k_2^5 r^2.$$

1) V. Fock, *Ann. d. Phys.* [5] 17. S. 418. 1933; Gl. (94)

2) Balth. van der Pol, *Ztschr. f. Hochfrequenztechnik* 37. S. 152. 1931; Gl. (18).

Das 2., 3., 4. und 5. Glied ergeben das Korrektionsglied für z in der 1. Potenz: $\pi/16 k_2^4 z$. Durch Addition erhält man:

$$(56) \quad H_{90^0} = \frac{4}{15} k_2^3 - \frac{4}{105} k_2^5 r^2 + \frac{\pi}{16} k_2^4 z^1).$$

2. Magnetisch vertikale Komponente im Luftraum ($z > 0$) in der Entfernung $|r| > z$; ebenfalls für $z = 0$ spezialisiert.

Für diesen Fall ist Π_1 wieder wie früher zu zerlegen in O_1, O_{21}, O_{22} .

Der Beitrag

$$O_1 = - \frac{2}{k_1^2 - k_2^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{R} \exp.(i k_1 R) \right)$$

ist für $z \rightarrow 0$, $|k_2 r| < 1$ und $k_1^2 \ll k_2^2$ gegenüber den anderen Beiträgen zu vernachlässigen.

O_{22} ergibt mit derselben Substitution wie M_{22} den Wert:

$$(57) \quad O_{22} = - \frac{\pi i k_2^3}{2} \left(z + \frac{k_2^2 z^3}{8} \right) - \frac{\pi i}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(z + \frac{k_2^2 z^3}{8} \right) - \frac{5}{48} k_2^4 z^3.$$

Die Lösung für O_{21} ergibt entsprechend M_{21} den Wert:

$$(58) \quad \left\{ \begin{aligned} O_{21} = & - \frac{\sqrt{2\pi} i \cdot k_2^3 \exp.(i z k_2)}{k_2^3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \\ & \cdot \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{30} r^2 k_2^2 + \frac{i z k_2^2 \cdot 3}{2 k_2} \left(\frac{1}{15} - \frac{1}{210} r^2 k_2^2 \right) \right]. \end{aligned} \right.$$

Demnach ist für $z = 0$:

$$(59) \quad \Pi_1 = O_{21} + O_{22} = i \left[\frac{2}{3} k_2 - \frac{1}{15} r^2 k_2^3 \right] + \frac{2}{k_2^2 r^3}$$

in Übereinstimmung mit Π_2 [vgl. Gl. (54)].

Ferner ist:

$$H_z = k_1^2 \Pi_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Pi_1,$$

woraus die imaginären Glieder wieder die 90°-Komponente ergeben.

Der imaginäre Teil von $\partial^2/\partial z^2 O_{21}$ lautet:

$$(60a) \quad \left\{ \begin{aligned} & 2 k_2^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{30} r^2 k_2^2 \right) - 6 k_2^3 \left(\frac{1}{15} - \frac{1}{210} r^2 k_2^2 \right) \\ & = \frac{4}{15} k_2^3 - \frac{4}{105} r^2 k_2^5. \end{aligned} \right.$$

Der imaginäre Teil von $\partial^2/\partial z^2 O_{22}$ lautet:

$$(60b) \quad - \frac{3\pi}{8} k_2^4 z + \frac{5\pi \cdot 6}{2 \cdot 48} k_2^4 z = - \frac{\pi}{16} k_2^4 z.$$

1) Korrektionsglieder ($r z$) sind dabei nicht berücksichtigt; dies erklärt den Unterschied der z -Korrektionsglieder von Gl. (61) und (38).

Durch Addition von Gl. (60a) und (60b) erhält man die 90°-Komponente, da die anderen Beiträge wegen der Bedingungen $|k_2 r| < 1$ und $k_1^2 \ll k_2^2$ zu vernachlässigen sind.

$$(61) \quad H_{90^\circ} = \frac{4}{15} k_2^3 - \frac{4}{105} r^2 k_2^5 - \frac{\pi}{16} k_2^4 z, \quad \text{für } z > 0$$

in Übereinstimmung mit Gl. (56). Zu beiden Seiten der Trennungsebene ($z = 0$) stimmen die zwei Komponenten in kleiner radialer Entfernung überein, wie es sein muß. Ferner stimmen die Gl. (56) und (61) überein mit Gl. (40a) für $r \rightarrow 0$ und $z \rightarrow 0$.

Zusammenfassung

Im ersten Teil wird die allgemeine Formel für die magnetische vertikale Komponente in der Dipolachse ($r \ll z$) für kleine Aufpunktabstände ($|k_2 z| < 1$) zuerst im leitenden Halbraum, dann im Luftraum berechnet. Anschließend wird die allgemeine Formel vereinfacht, insbesondere der imaginäre Teil, der die 90°-Komponente liefert, in beiden Medien angegeben, ihre Übereinstimmung an der Trennungsfläche ($z = 0$) gezeigt und numerisch diskutiert.

Im zweiten Teil wird die magnetische vertikale Komponente für kleine ($|k_2 r| < 1$) Radialentfernungen vom Dipol in der Nähe der Erdoberfläche ($z \ll r$) berechnet; in beiden Medien stimmen sie überein, ebenso für $r = 0$ und $z \rightarrow 0$ mit der Formel des ersten Teils.

Freiburg i. Br., Mathematisch-Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 19. Juni 1934)

**Wechselstromwiderstandsmessungen und
Plasmaschwingungen im Gleichstromlichtbogen¹⁾**

Von Eduard Gerber

(Mit 21 Figuren)

I. Einleitung

Schon unter den ersten Untersuchungen des elektrischen Lichtbogens finden wir Arbeiten²⁾, die versuchen, mittels überlagertem Wechselstrom den „Widerstand“ der Bogengasstrecke zu ermitteln. Besonders bekannt geworden sind die Messungen von W. Duddell³⁾. Er fand, daß bei einer Variation der Frequenz des überlagerten Wechselstroms der Widerstand des Kohlebogens bis zu etwa $0,1 \cdot 10^6/\text{sec}$ anstieg, bei höheren Frequenzen konstant blieb.

Fußend auf der Duddellschen Bestimmung der Frequenz des Wechselstroms, bei der Widerstandskonstanz eintritt, sind durch Hagenbach, Perzy und Wehrli⁴⁾ eine große Anzahl von Bogenkombinationen bei einer Frequenz von $0,19 \cdot 10^6/\text{sec}$ durchgemessen worden. Von H. v. Dziewulski⁵⁾ wurden diese Messungen auch auf den Hg-Bogen ausgedehnt.

Alle die zuletzt erwähnten Messungen sind bei einer einzigen Frequenz ausgeführt. Das Ziel der vorliegenden Untersuchungen ist die Widerstandsmessung nach verschiedenen, vor allem höheren Frequenzen hin zu erweitern und dabei die Duddellsche Messung des Widerstandes in Abhängigkeit von der Frequenz nachzuprüfen und auf verschiedene Bögen auszu dehnen.

1) Gekürzte Dissertation der Technischen Hochschule München, eingereicht am 10. Februar 1934.

2) H. Ayrton, The electric arc, The Electrician Printing, S. 411, London 1902.

3) W. Duddell, Phil. Trans. A. 203. S. 305. 1904. A. Hagenbach, Handb. d. Radiologie, Bd. IV, S. 102, Leipzig 1917.

4) A. Hagenbach u. R. Perzy, Arch. scienc. phys. et nat. 4. S. 363. 1922. A. Hagenbach u. M. Wehrli, Ztschr. f. Phys. 20. S. 96. 1923; 26. S. 23. 1924.

5) H. v. Dziewulski, Ztschr. f. Phys. 69. S. 366. 1931.

II. Meßmethode**1. Meßprinzip**

Das Prinzip der Widerstandsmessung ist das von Hagenbach und Wehrli¹⁾ angewandte der Substitution. Der Wechselstrom wird in einem Röhrengenerator erzeugt und induktiv auf den abgestimmten Meßkreis übertragen. In diesen Kreis kann abwechselnd der brennende Bogen und ein geeichter Vergleichswiderstand geschaltet werden. Letzterer wird so lange verändert, bis sich im Wechselstrommeßinstrument des Meßkreises derselbe Ausschlag zeigt wie bei eingeschaltetem Bogen. Diesem Widerstand wird dann der Bogenwiderstand gleichgesetzt.

2. Meßanordnung

Stromkreis *III* in Fig. 1 ist der Betriebsstromkreis des Lichtbogens *BO*. Stromquelle ist eine Gleichstrommaschine

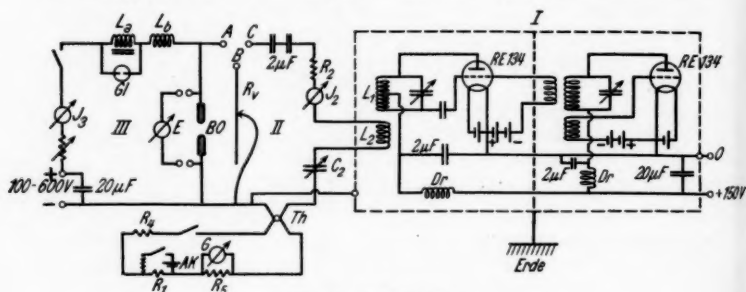


Fig. 1. Schaltskizze

des Instituts, deren Spannung zwischen 100 und 600 Volt beliebig reguliert werden kann. Die Kapazität von $20\ \mu\text{F}$ dient dazu, die Kollektorschwankungen und andere Störungen, die auf die Leitungen von der Maschine zum Bogenkreis induziert werden können, von diesem fernzuhalten. Zur Strom- und Spannungsmessung dient ein Siemens & Halske-10 Ω -Instrument J_3 bzw. ein Nadir-Millivolt- und -Amperemeter E mit Nebenschluß. Das Voltmeter E ist während der Wechselstrommessungen abgeschaltet.

Eine Drossel mit Eisenkern L_a mit ungefähr 4 Hy Selbstinduktion dient zur Beruhigung des Bogens; sie ist durch eine

1) A. Hagenbach u. M. Wehrli, a. a. O.

Glimmlampe Gl überbrückt, damit sich bei einem etwaigen Abreißen des Bogens die in der Drossel induzierte Spannung nicht über den Meßkreis ausgleicht. Unmittelbar an der Bogenanode liegt eine möglichst kapazitätsfreie Hochfrequenzdrossel L_b , bestehend aus einer einlagigen Zylinderspule von 0,7 mH Selbstinduktion. Zusammen mit der Eisendrossel genügt sie, wie die weiter unten angeführten Kontrollmessungen zeigten, um den Gleichstromkreis für alle benützten Frequenzen abzuriegeln.

Der Röhrengenerator I wirkt über eine Vorröhre, deren Kapazität neutralisiert ist, auf den Meßkreis II ein. Dadurch wird eine Rückwirkung des Meßkreises auf den Generator, sei es infolge fester Kopplung oder durch Eigenschwingungen im Meßkreis, unmöglich gemacht. Benützt wurden zwei RE 134, die im Gegensatz zu Röhren größerer Leistung in dem ganzen benützten Frequenzbereich ($4 \cdot 10^2$ bis $1,5 \cdot 10^6$ /sec) hinreichende Konstanz des Schwingungsstromes zeigten. Durch Verwendung von Steckspulen und schwenkbaren Spulenkopplern war es leicht möglich, diesen großen Frequenzbereich zu überstreichen und zwecks Einstellung der gewünschten Wechselstromstärke die Kopplungen der Spulen L_1 und L_2 zu variieren. Zur Vermeidung von wilden Kopplungen zwischen Generator, Vorröhre und Meßkreis sind die beiden ersteren gepanzert und die Anodenstromzuleitungen für die fraglichen Frequenzen blockiert.

Im Meßkreis liegt außer der Kopplungsspule L_2 , einem Drehkondensator C_2 und zwei durchschlagsicheren Kondensatoren von großer Kapazität ein Hartmann & Braun-100 mA-Thermomilliamperemeter J_2 ; ferner ein Widerstand R_v , der den Meßkreis für jede Frequenz so weit dämpft, daß die kleine Änderung der Eigenfrequenz von Kreis II , die sich beim Umschalten Bogen-Vergleichswiderstand nicht ganz vermeiden läßt, keine Schwierigkeiten ergab.

Der geeichte Vergleichswiderstand R_v besteht aus 0,1 mm-Konstantendraht von 30 cm Länge, auf dem ein Kontakt verschiebbar ist. Der Draht ist für die angewandten Frequenzen praktisch frei von Skineffekt. Die genaue Messung der Stromstärke des Wechselstromes geschieht mit einem Thermokreuz Th von Siemens & Halske (Empfindlichkeit 1,9 mV bei 10 mA Wechselstrom) in Verbindung mit einem Spiegelgalvanometer G von Leybold (10^{-9} Amp. Empfindlichkeit bei 22 Ω Widerstand). Um mit großer Empfindlichkeit des Instruments arbeiten zu können, wird die Maximalstromstärke, die bei einer Verbindung $C-B$ und Kurzschließung von R_v entsteht (vgl. Fig. 1),

kompensiert. Denn die Abnahme der Stromstärke bei Einschaltung des Bogens in den Meßkreis ist im Verhältnis zur Maximalstromstärke gering. Zur Kompensation dient die Stromquelle AK von 2 Volt Spannung, die an dem Widerstand R_1 von $1\ \Omega$ den notwendigen Spannungsabfall hervorruft. Die beiden Widerstände R_4 und R_5 im Galvanometerkreis dienen zur Einstellung der Empfindlichkeit des Spiegelinstruments.

3. Verlauf einer Messung

Der Röhrengenerator und die Vorröhre werden mit Hilfe eines Telefunken-Wellenmessers auf die gewünschte Frequenz abgestimmt. Hieraus werden im Meßkreis die Punkte B und C verbunden, der Schieber des Vergleichswiderstandes R_V auf Null gestellt und mit Hilfe der beiden Meßinstrumente Resonanz und Wechselstromstärke in Kreis II eingestellt. Nun wird der Bogen gezündet und auf die gewünschte Gleichstromstärke eingestellt, A und C werden verbunden und der Ausschlag im Spiegelgalvanometer abgelesen. Hierauf wird auf $B-C$ umgeschaltet, durch Verschieben des Kontaktes auf dem Vergleichswiderstand der gleiche Ausschlag wieder hergestellt und der Widerstand abgelesen. Zum Schluß wird der Widerstand der sich fest berührenden Bogenelektroden auf dieselbe Weise gemessen und von obigem Wert in Abzug gebracht.

4. Kontrollmessungen

a) Prüfung der Frequenzunabhängigkeit der Meßanordnung

Skinneffekt- und selbstinduktionsfreie Konstantandrähte von 0,1 und 0,06 mm Durchmesser mit Widerständen von der Größe 10–20 Ω wurden zwischen den Bogenelektroden befestigt (vgl. Fig. 2) und ihr Widerstand nach der unter 3. geschilderten Methode für sämtliche später benützten Frequenzen und für Gleichstrom (Stromquelle war in diesem Fall ein in den Meßkreis eingeschalteter 4 Volt-Akkumulator) durchgemessen. Fig. 3 zeigt eine Meßreihe. Als Abszisse ist die Frequenz, als Ordinate der Widerstand aufgetragen. Bei sämtlichen Kontrollmessungen ergab sich eine Ab-

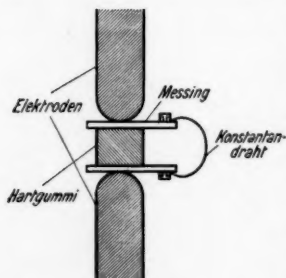


Fig. 2. Anordnung für Kontrollmessungen

weichung der einzelnen Werte voneinander und von den mittels der Wheatstoneschen Brückenmethode ermittelten Werten von max. nur $0,5\%$. Gleichzeitig wurde auch die notwendige Größe des unter 2. erwähnten

Dämpfungswiderstandes R_2 festgelegt. Bei Frequenzen bis zu $0,4 \cdot 10^6/\text{sec}$ wurden 100Ω verwendet, bei höheren Frequenzen zur Vergrößerung der Dämpfung 180Ω . Bei diesen Werten war beim Umschalten Bogen-Meßdraht keine Verstimmung des Meßkreises mehr zu beobachten.

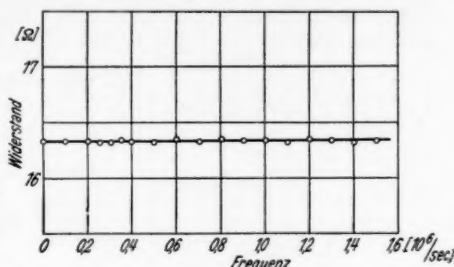


Fig. 3. Widerstand eines Konstantandrahtes

b) Prüfung der Unabhängigkeit vom angeschalteten Gleichstromnetz

Da das Gleichstromnetz mit dem Meßstromkreis verbunden ist, wenn der Wechselstrom über den Bogen fließt, muß geprüft werden, ob das Einschalten des Gleichstroms die Widerstandsmessung beeinflusst. Ein Schniewindtgerät von 20Ω Widerstand wurde durch möglichst kurze Leitungen mit den auseinandergezogenen Elektroden verbunden, der Bogen also durch dieses Gitter ersetzt. Darauf wurde die Verbindung A—C (Fig. 1) hergestellt und die Änderung der Wechselstromstärke im Spiegelgalvanometer beobachtet, wenn das Gleichstromnetz eingeschaltet wurde. Es zeigte sich gleichmäßig bei allen Frequenzen eine Ausschlagsänderung von nur 0,05 Skalenteilen entsprechend $0,08 \Omega = 0,5\%$ nach größeren Widerstandswerten zu, die von der Erwärmung des Widerstandes herrühren konnte.

Die angeführten Meßfehler fallen gegenüber den Ungenauigkeiten, die durch die Schwankungen des Lichtbogens hervorgerufen werden, außer Betracht. Es wird also die Genauigkeit der Messungen ausschließlich durch die Konstanz des Bogenstroms bestimmt.

III. Versuchsergebnisse

1. Der Kohlebogen in atmosphärischer Luft

a) Der Homogenkohlebogen

Die Kohlen waren senkrecht übereinander angeordnet. Zwecks genauer Bestimmung der Bogenlänge wurde das Bild

des Bogens in 18facher Vergrößerung auf Koordinatenpapier projiziert. Zunächst wurde mit Siemens-Lichtenberg-Homogenkohle A von 11 mm Durchmesser gemessen. Die Anode war dabei oben. Die Stromstärke des Wechselstroms betrug 20 mA. Diese Größe wurde für sämtliche Messungen, wenn nichts anderes erwähnt ist, beibehalten. Fig. 4 zeigt die Abhängig-

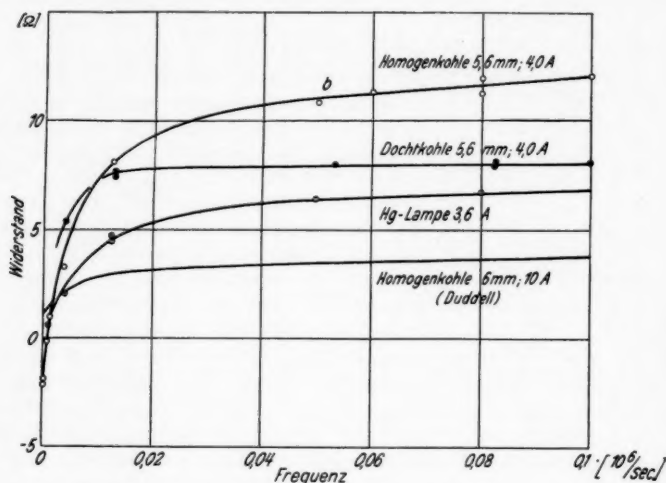


Fig. 4. Bogenwiderstand bei tieferen Frequenzen

keit von der Frequenz bis $0,1 \cdot 10^6/\text{sec}$ bei einer Stromstärke von 4 Amp. und einer Bogenlänge von 5,6 mm (Kurve b). Alle Meßpunkte sind wie bei sämtlichen Messungen das Mittel aus mindestens 5 Einzelmessungen. Zum Vergleich ist die Messung von Duddell¹⁾, die er mit Homogenkohlen Conrady Noris, 11 mm Durchmesser, 10 Amp. Stromstärke und 6 mm Bogenlänge ausgeführt hat, in Fig. 4 eingezeichnet. Der Kurvenverlauf ist im großen und ganzen derselbe, nur sind die absoluten Werte der von mir gemessenen Widerstände größer als bei Duddell, da der von mir verwendete Gleichstrom erheblich schwächer war.²⁾

1) W. Duddell, a. a. O.

2) Vgl. A. Hagenbach u. M. Wehrli, a. a. O.

Anders werden die Verhältnisse, wenn man zu höheren Frequenzen übergeht. Die Ergebnisse solcher Messungen sind

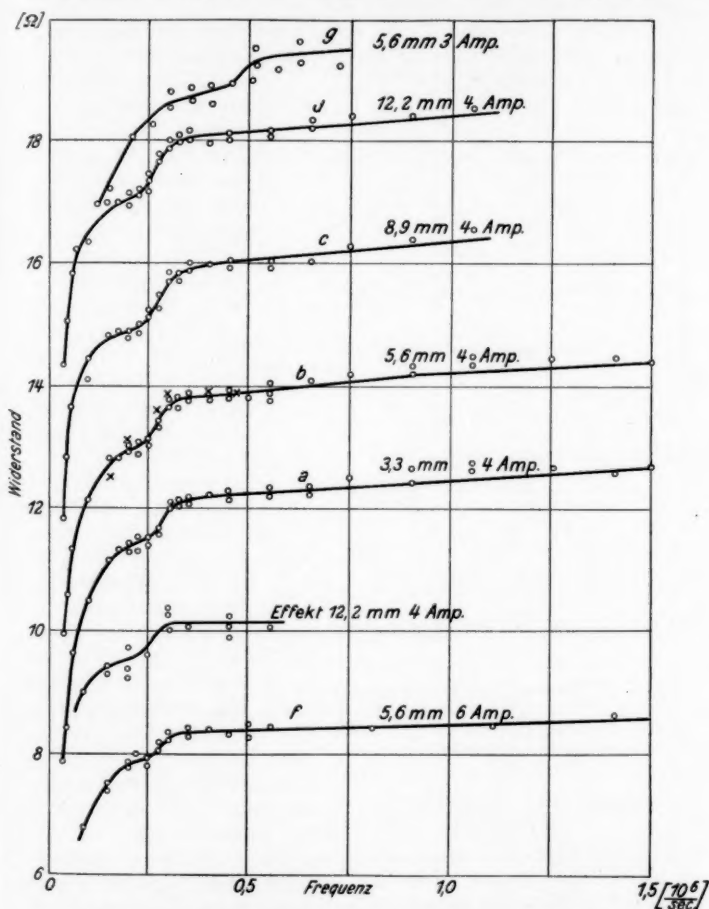


Fig. 5. Widerstand des Homogenkohlebogens 11 mm Kohledurchmesser und des Effektkohlebogens 8 mm Kohledurchmesser bei verschiedenen Gleichstromstärken und Bogenlängen

in Fig. 5 und 6 dargestellt. Dabei ist gegenüber Fig. 4 der Frequenzmaßstab verkleinert, der Widerstandsmaßstab ver-

größert worden. Infolge davon erscheinen in dem Gebiet bis $0,1 \cdot 10^6/\text{sec}$ die Kurven sehr steil, während sie bei dem Maßstab von Fig. 4 flach gewesen waren.

Kurve *b* der Fig. 5 ist die Fortsetzung der Kurve *b* in Fig. 4. Man sieht, daß erst bei einer Frequenz von $0,3 \cdot 10^6/\text{sec}$

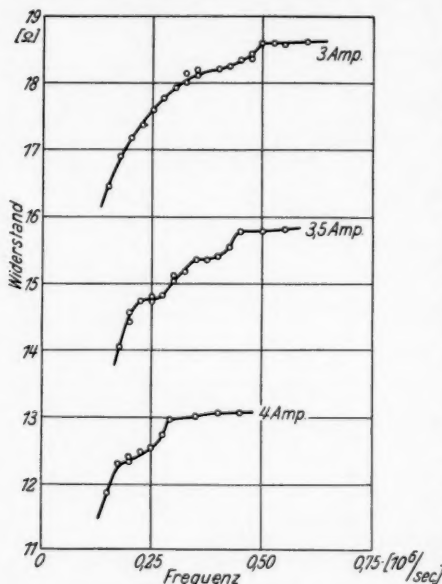


Fig. 6. Widerstand des Homogenkohlebogens 8 mm Kohledurchmesser bei verschiedenen Stromstärken und konstanter Bogenlänge

sättelung nach höheren Frequenzen zu. Doch kann diese Messung keine große Genauigkeit beanspruchen, da der Bogen infolge der im Verhältnis zum Kohledurchmesser zu kleinen Stromstärke nicht mehr gleichmäßig abbrannte. Es wurde deshalb mit Siemens-Planina-Homogenkohle von 8 mm Durchmesser bei 5,6 mm Bogenlänge noch einmal gemessen. Das Resultat zeigt Fig. 6. Hier ist die Streuung der Meßpunkte sehr gering. Man sieht eine deutliche Verschiebung der Einsättlung gegen höhere Frequenzen. Dabei verschiebt sich auch der Eintritt der Widerstandskonstanz.

annähernd Konstanz erreicht wird. Auffallend ist ferner die deutliche Einsättlung der Kurve zwischen $0,2$ und $0,3 \cdot 10^6/\text{sec}$. Die Kurven *a*, *b*, *c*, *d* in Fig. 5 sind bei der konstanten Stromstärke von 4 Amp. und bei Bogenlängen von 3,3, 5,6, 8,9 und 12,2 mm durchgemessen. Dabei zeigt sich, wie zu erwarten, eine Verschiebung mit wachsender Bogenlänge zu größeren

Widerstandswerten zu, während die Einsättlung an derselben Stelle bleibt. Die Variation der Stromstärke bei Konstanz der Bogenlänge (vgl. Fig. 5, Kurven *f*, *b*, *g*) ergibt bei kleiner Stromstärke eine Verschiebung dieser Ein-

Daß die Lage der Einsattlung von der Stellung der Kohlen des Bogens unabhängig war, sollen die Messungen zeigen,

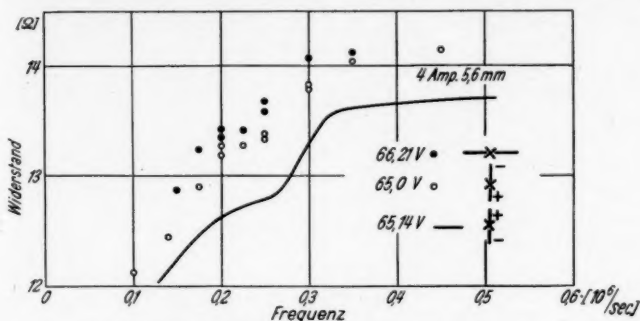


Fig. 7. Widerstand des Homogenkohlebogens bei verschiedener Lage der Kohlen

deren Ergebnisse Fig. 7 enthält. Die Bogenlänge war dabei 5,6 mm, die Gleichstromstärke 4 Amp. Die Stellung der Kohlen bei den verschiedenen Messungen nebst den zugehörigen Brennspannungen ist aus der Figur ersichtlich. Die Verschiebung der gesamten Kurven zu größeren oder kleineren Widerstandswerten wurde vermutlich durch die infolge der Lageveränderung entstandenen kleineren Verschiebungen der Temperaturverhältnisse hervorgerufen.

Zu untersuchen war noch, ob der Widerstand des Bogens bei den verschiedenen Frequenzen des Wechselstroms von der Stärke dieses Wechselstroms abhängig ist. Fig. 8 (Kurven C) zeigt Widerstandsmessungen bei verschiedenen Wechselstrom-

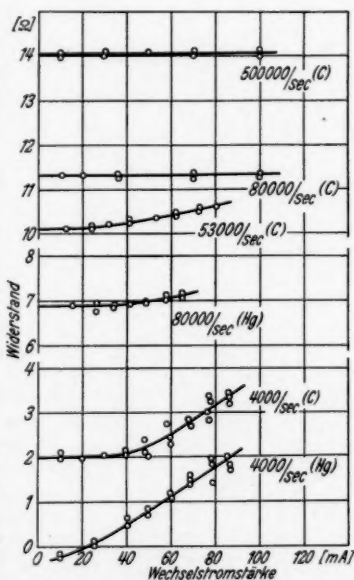


Fig. 8. Widerstand von Homogenkohle- und Hg-Bogen bei verschiedenen Wechselstromstärken

stärken mit der Frequenz als Parameter. Benützt wurde der Kohletyp von Fig. 5 bei 4 Amp. Stromstärke und 5,6 mm Bogenlänge. Für die höheren Stromstärken wurde dem Thermokreuz ein Konstantendraht von 0,1 mm Dicke parallel geschaltet. Man erkennt aus der Fig. 8, daß bis über 20 mA hinaus — 20 mA war bekanntlich die bei sämtlichen Messungen benutzte Stromstärke — für alle Frequenzen des Wechselstroms der gemessene Widerstand unabhängig von der Stärke dieses Wechselstroms ist. Bei größeren Wechselstromstärken allerdings zeigt sich für tiefere Frequenzen (4000—53 000) ein Ansteigen des Widerstandes mit der Wechselstromstärke, während für höhere Frequenzen (80 000—500 000) der Widerstand bis zur höchsten gemessenen Stromstärke (100 mA) konstant bleibt.

b) *Der Dochkohlebogen*

Vgl. Figg. 4 und 9. Hier wird die angenäherte Widerstandskonstanz bereits bei kleineren Frequenzen erreicht. Eine

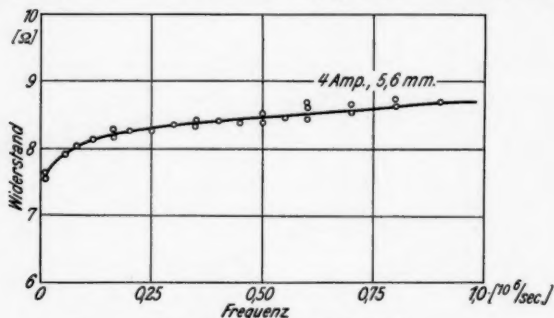


Fig. 9. Widerstand des Dochkohlebogens

Einsattlung ist nicht vorhanden. Gemessen wurde mit Siemens-Plania-Dochkohle A von 8 mm Durchmesser.

c) *Der Effektkohlebogen*

Die Temperatur der Anode ist hier niedriger als beim Homogen- und Dochkohlebogen. Nach Versuchen mit den verschiedensten Kohlentypen, auch mit homogenen Effektkohlen, wurde die Brennkonzanz noch am besten bei der Siemens-Effektdochtkohle 201 gelb von 8 mm Durchmesser gefunden. Doch streuen auch hier die Meßpunkte noch so stark (Fig. 5), daß man aus der Messung nicht viel entnehmen kann. Möglich ist aber eine Einsattlung an der gezeichneten Stelle jedenfalls.

2. Der Kupferbogen in atmosphärischer Luft

Nachdem nun ein Lichtbogen mit ausgesprochen heißer Kathode und vorwiegend thermischer Elektronenbefreiung durchgemessen worden war, wird jetzt ein Bogen mit „kalter“ Kathode behandelt¹⁾. Um eine genügende Konstanz des Kupferbogens zu erhalten, muß die Kathode gekühlt werden und die Stromstärke klein sein. Denn sonst findet ständig ein Wechsel zwischen der Normalform und der Oxyd-(Zisch-)Form des Bogens statt²⁾. Letztere macht sich bemerkbar durch ein Sinken des Kathodenfalls und damit der

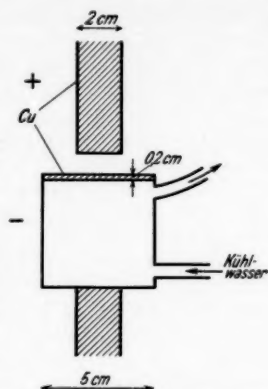


Fig. 10. Elektrodenanordnung des Kupferbogens

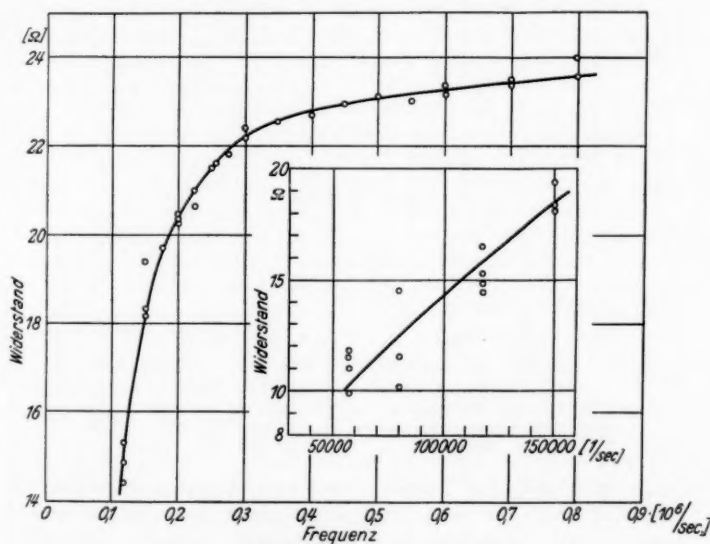


Fig. 11. Widerstand des Kupferbogens

1) Vgl. die Einteilung der Metalle nach ihren Lichtbogeneigenschaften bei W. Ramberg, *Ann. d. Phys.* [5] 12. S. 319. 1932.

2) W. B. Nottingham, *Journ. of the Franklin Inst.* 207. S. 299. 1929.

Brennspannung und durch das Auftreten einer gelben Flamme, die den Bogenkern umgibt. Die benützte Elektrodenanordnung zeigt Fig. 10, die bei 2 Amp. 6 mm Bogenlänge erhaltene Widerstandskurve Fig. 11. Der Widerstand erreicht erst bei etwas höheren Frequenzen als bei der Homogenkohle annähernde Konstanz, eine Einsattlung ist nicht zu erkennen.

3. Der Quecksilberbogen

a) Quecksilberelektroden im Quecksilberdampf

Benützt wurde zunächst eine Heraeus-Quarzlampe mit einer maximalen Belastbarkeit von 3,8 Amp. und einer Bogenlänge von ungefähr 6,5 cm. Beim ersten Versuch einer Widerstandsmessung ergab sich beim Einschalten des Bogens in den Meßkreis II (Fig. 1) statt einer Abnahme eine Zunahme des Wechselstroms. Darauf wurde der Röhrengenerator abgeschaltet

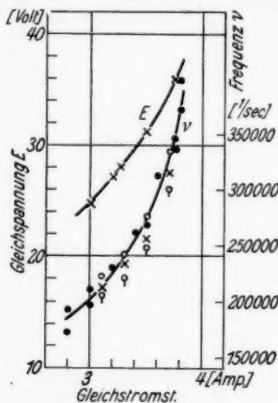


Fig. 12a. Abhängigkeit der Bogenspannung E und der Frequenz ν von der Gleichstromstärke bei der Heraeuslampe

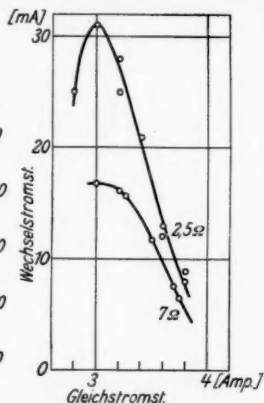


Fig. 12b. Abhängigkeit der Wechselstromstärke im Resonanzpunkt von der Gleichstromstärke bei der Heraeuslampe

und mittels J_2 das Vorhandensein von Eigenschwingungen in II mit einer für eine bestimmte Lampenstromstärke scharf ausgeprägten Resonanzstelle festgestellt. Fig. 12 zeigt die Abhängigkeit der Resonanzfrequenz ν von der Stromstärke (schwarze Punkte, ausgezogene Kurve); in Kreis II war nur der Ohmsche Widerstand von J_2 und L_2 , also ungefähr $2,5 \Omega$ eingeschaltet. Bei diesem Widerstand und bei

7 Ω wurde auch die Abhängigkeit der Wechselstromstärke an der Resonanzstelle von der Bogenstromstärke gemessen (Fig. 12b)¹⁾.

Nun hat die Lampe eine steigende Charakteristik (vgl. Fig. 12a). Es ist deshalb an sich schon sehr unwahrscheinlich, daß wir es hier mit einer Art Poulsenschen Schwingungen zu tun haben; bestätigt wurde die vollständige Unabhängigkeit der erzeugten Frequenz von den Daten des Schwingungskreises durch folgenden Versuch: der Drehkondensator C_2 (vgl. Fig. 1) wurde kurzgeschlossen, so daß die Eigenfrequenz von II zu bedeutend niedrigeren Werten verschoben war; an L_2 wurde ferner statt des Generators der auf die Frequenzen der Hg-Lampe abstimmbare Gitterkreis eines Audions angekoppelt. In seinem Anodenkreis lag ein Gleichstrommilliamperemeter zur Feststellung der Resonanz. Diese trat für jede Stromstärke der Lampe genau bei den bereits gemessenen Frequenzen ein. Auch ein Auswechseln der Spule L_2 gegen solche von größerer und kleinerer Selbstinduktion brachte kein anderes Ergebnis, ebenso nicht die Änderung des Aufbaus der Anordnung. Wir haben also die Tatsache, daß im Bogen selbst unabhängig von irgendwelchen angekoppelten Schwingungskreisen Schwingungen entstehen.

Um ihren Entstehungsort lokalisieren zu können, wurde die Hg-Lampe überhaupt nicht mehr mit Anode und Kathode in den Schwingungskreis geschaltet, sondern es wurden Elektroden in verschiedener Lage auf den Lampenkörper aufgebracht und mit Gitter und Kathode des abstimmbaren Gitterkreises des Audions verbunden. In seinem Anodenkreis lag diesmal das Spiegelgalvanometer mit Kompensation, da naturgemäß sehr geringe Intensitäten zu erwarten waren. Bei den \circ -Punkten der Fig. 12a lagen zwei das Rohr umfassende Kupferzylinder von 1 cm Länge je 1 cm von Kathode und Anode und 2,5 cm voneinander entfernt, bei den \cap war ihr Abstand auf 0,5 cm verringert. Bei den \times lagen sich zwei kleine Kupferbleche in der Mitte der Lampe diametral gegenüber. Wie man aus der Fig. 12a sieht, war ein wesentlicher Frequenzunterschied nicht vorhanden, auch die Amplitude blieb bei den drei verschiedenen Elektrodenanordnungen die gleiche. Man kann also daraus folgern, daß die Schwingungen

1) Die Stromstärkeabnahme unterhalb 3 Amp. ist nicht unbedingt als reell anzusprechen, da hier das Kathodenquecksilber bereits soweit verdampft, daß der Kathodenfleck aus dem engen Brennrohr in das Hg-Vorratsgefäß einzudringen beginnt und der Bogen deshalb sehr instabil wird.

überall im Bogengasraum entstehen. Dies kann man sich nur vorstellen, wenn man annimmt, daß die im Bogengas vorhandenen Ladungsträger entsprechende Bewegungen ausführen.

Die Stromabhängigkeit der Frequenz ist gleichzeitig eine Druckabhängigkeit; denn mit der Stromstärke wächst der Dampfdruck in der Hg-Lampe sehr stark an. Um nun den

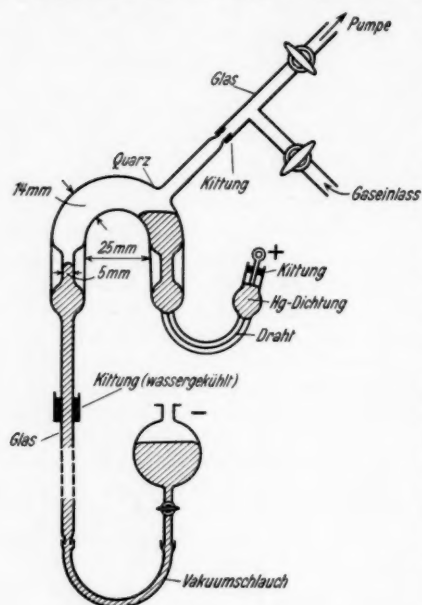


Fig. 13.
Hg-Quarzlampe mit Dampfdruckablesung

Druck unabhängig von der Stromstärke regulieren und messen zu können, wurde eine Quarzlampe konstruiert, deren Kathode als Manometer ausgebildet war (Fig. 13). Der Bogen wurde durch Heben des kathodischen Hg-Vorratsgefäßes gezündet und dann die Kathodenoberfläche auf die Mitte der Rohrverengung eingestellt. Dadurch wurde eine zu heftige Bewegung des Kathodenflecks verhindert. Während des Betriebs der Lampe war dauernd eine Gaedescche rotierende Hg-Pumpe angeschlossen. Der Dampfdruck wurde variiert durch veränderliche Ventilator Kühlung. Die Zunahme der Kontraktion der Bogensäule mit zunehmendem Dampfdruck war ähnlich wie bei der Heraeuslampe bei zunehmender Stromstärke, so daß wenigstens größenordnungsmäßig auf gleiche Druckverhältnisse in beiden Lampen geschlossen werden konnte. Das Versuchsergebnis bei 3,25 Amp. Stromstärke zeigt Fig. 14. Der Vergleich mit der Stromstärke (Druck)-Frequenzkurve der Heraeuslampe (Fig. 12a) ergibt die Ähnlichkeit der beiden Kurven; man kann daraus folgern, daß auch für die Frequenzverschiebung in der Heraeuslampe in erster Linie die Änderung des Druckes maßgebend ist. Ferner ist eine Veränderung der Größe und

Druck unabhängig von der Stromstärke regulieren und messen zu können, wurde eine Quarzlampe konstruiert, deren Kathode als Manometer ausgebildet war (Fig. 13). Der Bogen wurde durch Heben des kathodischen Hg-Vorratsgefäßes gezündet und dann die Kathodenoberfläche auf die Mitte der Rohrverengung eingestellt. Dadurch wurde eine zu heftige Bewegung des Kathodenflecks verhindert. Während des Betriebs der Lampe war dauernd eine Gaedescche rotierende Hg-Pumpe angeschlossen. Der Dampfdruck wurde variiert durch ver-

Gestalt des Gasraumes ohne größeren Einfluß auf die erzeugte Frequenz.

Um die Verhältnisse im Quecksilberbogen mit denen des Kohlebogens vergleichen zu können und Auskunft über den Anstieg des Widerstandes mit der Frequenz zu erhalten, wurden Widerstandsmessungen wie beim Kohlebogen durchgeführt. Dazu wurde die Heraeuslampe benützt, da sie mehrere Stunden hindurch sehr konstant brannte.

Fig. 4 zeigt eine Widerstandsmessung in Abhängigkeit von der Frequenz, und zwar bei tieferen Frequenzen; Fig. 8 (Kurven Hg) Widerstandsmessungen bei verschiedenen Wechselstromstärken. Der Kurvenverlauf ist in beiden Fällen analog dem des Kohlebogens.

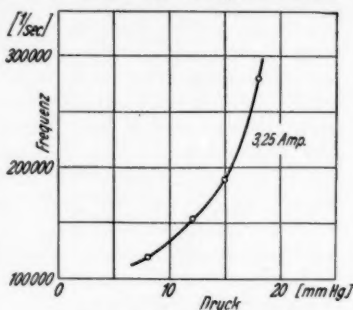


Fig. 14. Abhängigkeit der Resonanzfrequenz vom Dampfdruck beim Hg-Bogen

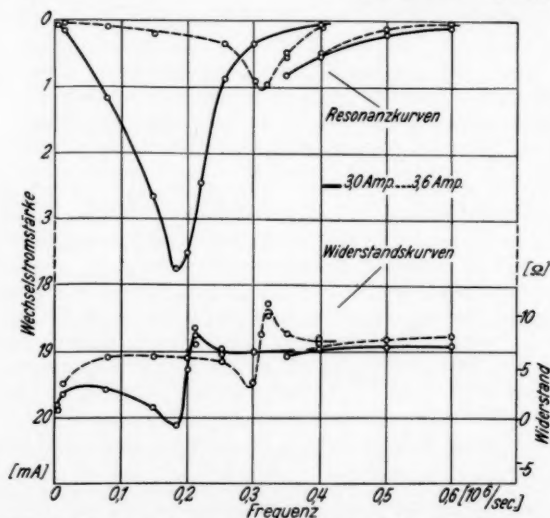


Fig. 15. Resonanzkurven und Widerstand der Heraeuslampe für 2 verschiedene Gleichstromstärken

Fig. 15 zeigt Widerstandsmessungen bei höheren Frequenzen (vgl. die entsprechenden Kohlebogenkurven in Fig. 5). Der Widerstandsmaßstab befindet sich auf der rechten Seite, links ist die effektive Stromstärke des Wechselstroms als Ordinate nach unten aufgetragen. Dazu wurde das Spiegelgalvanometer mit Hilfe eines dem Thermoelement parallel geschalteten Siemens & Halske-10 Ω -Instruments geeicht.

Nach Beendigung der Widerstandsmessung für eine bestimmte Frequenz wurde der Generator jedesmal ausgeschaltet und die Stromstärke der Lampenschwingung im Spiegelgalvanometer ohne Kompensation abgelesen. Die so erhaltenen Resonanzkurven sind in den oberen Teil der Fig. 15 eingezeichnet, und zwar ebenfalls mit der Ordinatenrichtung nach unten¹⁾.

Wie man aus den Widerstandskurven der Fig. 15 erkennt, beginnt der Widerstand schon bei niedrigeren Frequenzen als bei Kohle konstant zu werden. Ferner ist, wie zu erwarten, bei der Resonanzstelle eine Vergrößerung der Stromstärke (Verkleinerung des Widerstandes) vorhanden, die dann aber im Gegensatz zum Kohlebogen in eine Verkleinerung übergeht.

Dieser Kurvenverlauf ist wohl durch die sog. „Mitnahmerecheinung“ zu erklären. Das bedeutet, daß innerhalb eines gewissen Frequenzbereiches ober- und unterhalb der Resonanzstelle die stärkere Schwingung der schwächeren ihre Frequenz aufzwingt. In diesem Bereich haben wir dann nicht mehr zwei Schwingungen mit verschiedenen Frequenzen (Schwebungen), sondern zwei Schwingungen von der Frequenz der stärkeren Komponente. Dabei ist zu berücksichtigen, daß zwischen den beiden Komponenten eine Phasenverschiebung auftritt, die von $\varphi = 0$ unterhalb der Resonanzstelle über $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bei Resonanz bis $\varphi = \pi$ oberhalb derselben zunimmt²⁾.

Im vorliegenden Fall ist, wie aus Fig. 15 entnommen wird, die in II induzierte Generatorschwingung mit einer effektiven Stromstärke von 19 mA die mitnehmende, die Lampenschwingung mit 3,7 bzw. 1,0 mA die mitgenommene Schwingung. Unterhalb der Resonanzstelle addieren sich die Amplituden, die Stromstärke wird größer, der Widerstand der Lampe kleiner; nach Überschreiten der Resonanz wird die Phasenverschiebung der beiden Komponenten größer als 90° ; ihre Amplituden subtrahieren sich voneinander, der Lampen-

1) Um von $0,4 \cdot 10^6/\text{sec}$ an aufwärts noch genügend genau messen zu können, mußte ein kleineres L_2 genommen werden. Daher der Sprung bei dieser Frequenz.

2) E. V. Appleton, Proc. Cambridge Phil. Soc. 21. S. 231. 1922.

widerstand überschreitet seinen ungestörten Wert. Macht man das Amplitudenverhältnis der mitnehmenden zur mitgenommenen Schwingung immer kleiner, so nähert sich der Stromstärkeverlauf der zusammengesetzten Schwingung immer mehr der einfachen Resonanzkurve von Fig. 15 oben, d. h. das Stromstärkeminimum wird kleiner und verschwindet schließlich. Vgl. dazu auch Fig. 16. Hier ist der Verlauf der Wechselstrom-

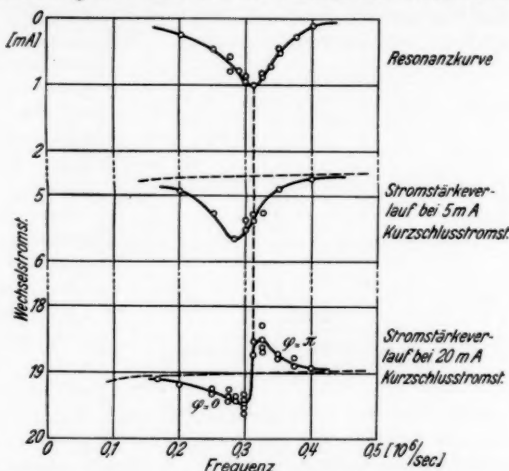


Fig. 16. Resonanzkurve und Stromstärkeverlauf der Heraeuslampe für 2 verschiedene Wechselstromstärken

stärke bei 3,6 Amp. Lampenstrom auch noch für 5 mA Kurzschlußstromstärke (Wechselstromstärke bei kurzgeschlossenem Bogen) aufgenommen. Das Verhältnis

$$\frac{\text{Stromstärke der mitnehmenden Schwingung}}{\text{Stromstärke der mitgenommenen Schwingung}}$$

ist am größten bei der Messung mit 3,6 Amp. (Fig. 15), nämlich $19 \text{ mA}/1 \text{ mA} = 19$; bei 3,0 Amp. (Fig. 15) ist es $19 \text{ mA}/3,7 \text{ mA} = 5,1$; bei 3,6 Amp. (Fig. 16) $4,7 \text{ mA}/1 \text{ mA} = 4,7$.

b) Quecksilberelektroden im Fremdgas

Es interessiert, ob im Hg-Bogen auch Schwingungen auftreten, wenn noch ein anderes Gas vorhanden ist. Um das zu untersuchen, wurde das in Fig. 13 abgebildete Quarzgefäß gründlich ausgepumpt und dann bis zu einem Druck von 45 mm aus einer Bombe Stickstoff eingelassen, der vorher zum

Zweck der Sauerstoffbefreiung und der Trocknung über glühendes Kupfernetz, Kalziumchlorid und Phosphorpentoxyd geleitet worden war. Nachdem der Bogen eingebrannt war, war bei 1,25 Amp. und 44 Volt ein Gasdruck von 96 mm vorhanden. Der Durchmesser der leuchtenden Bogensäule betrug dabei höchstens 1 mm. Die Kathodenoberfläche wurde 20 mm über der Mitte der Rohrverengung eingestellt (vgl. Fig. 13), da der Kathodenfleck sich nicht bewegte und der Bogen bei zu großer Länge abzureißen drohte. Fig. 17 zeigt den Widerstandsverlauf. Eine

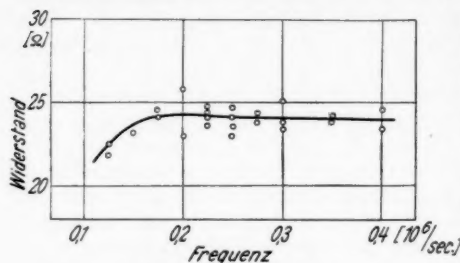


Fig. 17. Widerstand der Hg-Lampe mit Fremdgas

Eigenfrequenz ist offenbar nicht vorhanden; der Widerstand wird erst bei höheren Frequenzwerten wie beim reinen Hg-Bogen konstant. Um für Frequenzen bis $1,5 \cdot 10^6/\text{sec}$ Eigenschwingungen feststellen zu können, wurde ein Audion

mit aperiodischem Gitterkreis an L_2 (vgl. Fig. 2) angekoppelt. In seinem Anodenkreis lag wieder das Spiegelgalvanometer in Kompensationsschaltung. Auch mit dieser hochempfindlichen Anordnung — eine Schwingungsamplitude von $4 \cdot 10^{-6}$ Amp. würde im Spiegelgalvanometer einem Ausschlag von ungefähr 1 Skt. entsprechen, der noch sehr gut ablesbar war — wurde beim Durchdrehen von C_2 kein Ausschlag bemerkt.

4. Der Wolframbogen

Nach den Erfahrungen beim Hg-Lichtbogen lag es nahe, anzunehmen, daß die in Fig. 5 dargestellten Einsattlungen in der Widerstandskurve des Kohlebogens von Eigenschwingungen herrühren. Es wurde deshalb auch der Kohlebogen mittels der oben beschriebenen empfindlichen Audionanordnung bei den in Frage stehenden Frequenzen untersucht. Jedoch war nicht der kleinste Ausschlag zu bemerken. Es sind also zweifellos keine Eigenschwingungen von irgendwie wesentlicher Amplitude vorhanden. Möglich bleibt aber immer noch, daß im Kohlebogen ein schwingungsfähiges System vorhanden ist, dessen Eigenfrequenz an der Einsattlung liegt, dessen Eigenschwingungen aber wegen zu starker Dämpfung nicht zustande

kommen. Nun hängt die Dämpfung bei Schwingungen von Trägern, wie wir sie im Bogen anzunehmen haben, von der Zahl der Zusammenstöße und damit vom Gasdruck ab. Es war also interessant, bei niedrigerem Druck und damit kleinerer Dämpfung zu arbeiten. Der Kohlebogen ist dafür nicht sehr geeignet, wohl aber der ihm im Entladungsmechanismus ähnliche Wolframbogen, da er wegen des minimalen Verbrauchs an Elektrodenmaterial viel einfacher zu handhaben ist.

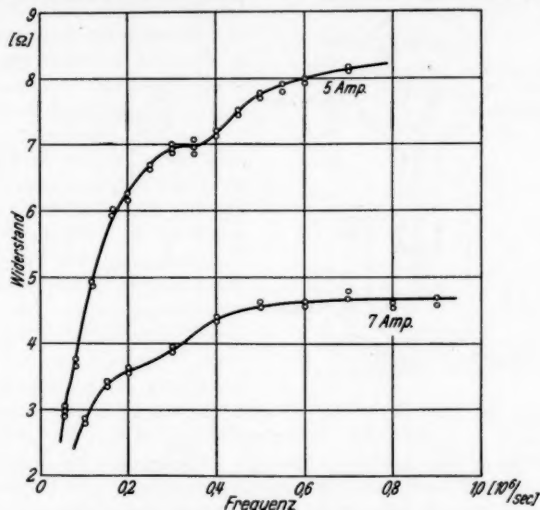


Fig. 18. Widerstand der Osram-Punktlichtlampe G 7,5

Zunächst wurde eine Osram-Punktlichtlampe G 7,5 durchgemessen. Sie war mit Stickstoff von ungefähr 100 mm Druck gefüllt. Die Anode bestand aus reinem Wolfram, während die Kathode zum Zweck einer leichten Zündung aus Wolfram mit Thoriumzusatz bestand¹⁾. Die für 5 und 7 Amp. Gleichstromstärke durchgeführten Messungen zeigt Fig. 18. Man erkennt die große Ähnlichkeit der Widerstandskurven mit denen des Homogenkohlebogens; auch die Einsattlung rückt mit abnehmender Stromstärke zu höheren Frequenzwerten.

Um den Gasdruck in weiten Grenzen variieren zu können und den Wolframbogen auch bei kleineren Stromstärken betreiben zu können, wurde ein neues Gefäß konstruiert (vgl.

1) Geiger-Scheel, Handb. d. Phys. Bd. XIX, S. 391, Berlin 1928.

Fig. 19). Die Elektroden stammen aus einer alten Osram-Wechselstrompunktlanpe für 2 Amp. Die Kathode besteht aus Wolfram + Thoriumoxyd, die Anode aus reinem Wolfram. Die beiden Elektroden sind an Messingstäben befestigt; der anodische ist mit Hilfe eines Schliffes um seine Achse drehbar angeordnet,

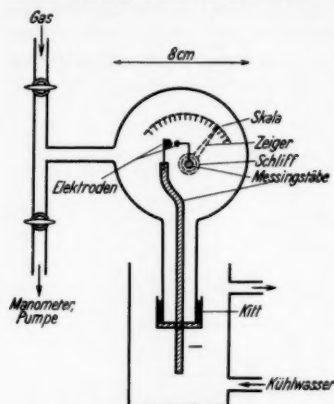


Fig. 19. Versuchsgefäß für den Wolframbogen

so daß der Bogen leicht gezündet und die Bogenlänge verändert werden kann. Die Lampe wurde mit Stickstoff und Wasserstoff betrieben, die in der auf S. 545 angegebenen Weise gereinigt wurden. Fig. 20 zeigt Widerstandsmessungen bei 4 mm Bogenlänge und 0,75 Amp. Stromstärke, und zwar die Kurven *a* und *b* für H_2 bei 112 bzw. 185 mm Betriebsdruck. Die gleichzeitige Untersuchung des Bogens mit der empfindlichen Audionanordnung ergab im Fall *a* keine Eigenschwingungen, im Fall *b* jedoch solche. Die Frequenz dieser Eigenschwingungen ist in der Fig. 20 durch einen Pfeil bezeichnet. Sie fällt wie beim Hg-Bogen nicht genau mit der Stelle des kleinsten Widerstandes zusammen. Wir können daher auch hier auf Vorhandensein von Mitnahme schließen. Die Unabhängigkeit der vom Bogen erzeugten Frequenz von den Daten des Schwingungskreises wurde wie beim Hg-Bogen festgestellt. Kurve *c* ist bei einem Druck von 112 mm in N_2 aufgenommen. Oberhalb von $0,75 \cdot 10^6$ sec waren Schwingungen zu beobachten, die keine ausgesprochene Resonanzstelle besaßen und sehr inkonstant waren. Zum Vergleich ist in die Fig. 20 noch die Messung an der Osrampunktlanpe G 7,5 bei 5 Amp. Stromstärke eingetragen (Kurve *d*).

Die Abhängigkeit der Bogenfrequenz, der Wechselstromstärke im Resonanzpunkt und der Gleichspannung vom Druck zeigt Fig. 21. Wir sehen, daß ebenso wie beim Hg-Bogen (vgl. Fig. 12 und 14) Gleichspannung und Frequenz mit dem Gasdruck ansteigen, die Wechselstromstärke dagegen abnimmt. Die Gleichstromstärke wurde dabei auf 0,75 Amp. konstant gehalten. Unterhalb von 120 und oberhalb von 400 mm Druck waren keine Schwingungen mehr zu beob-

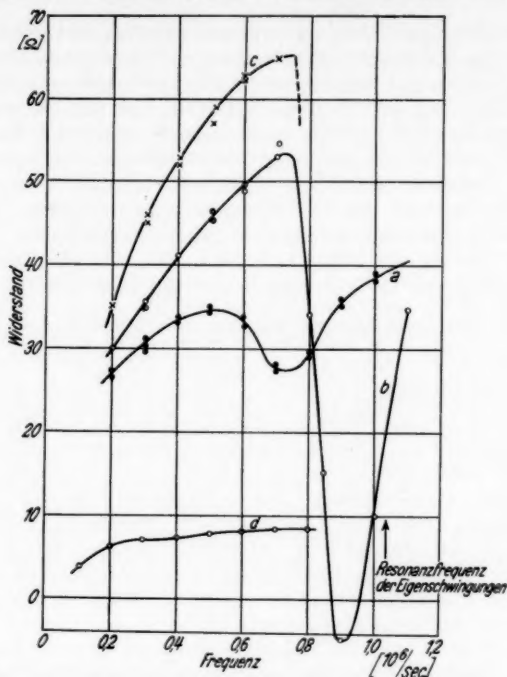


Fig. 20. Widerstand des Wolframbogens in H_2 und N_2 bei verschiedenem Gasdruck

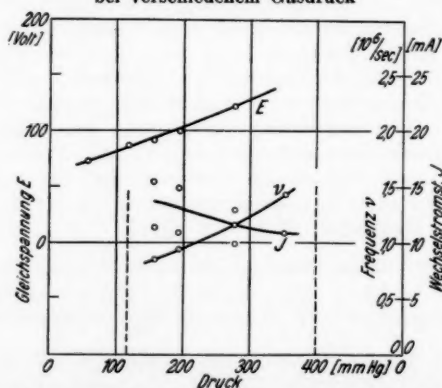


Fig. 21. Gleichspannung E , Frequenz ν und eff. Wechselstromstärke J in Abhängigkeit vom Gasdruck beim W-Bogen

achten. Oberhalb 400 mm wurden zwar ab und zu minimale Ausschläge des Instruments beobachtet, doch konnten dauernde Schwingungen mit Resonanzstelle nicht mehr festgestellt werden.

Das wichtigste Ergebnis der Versuche am Wolframbogen ist die Tatsache, daß wir hier durch Veränderung der Bogen-gasdichte Einsattlungen genau derselben Art wie beim Kohlebogen, außerdem aber auch Eigenschwingungen wie beim Hg-Bogen erhielten. Es ist demnach sehr wahrscheinlich, daß sämtliche beobachteten Erscheinungen auf dieselbe Ursache, wahrscheinlich auf Vorhandensein von schwingungsfähigen Ladungsträgern im Bogen gasraum, zurückzuführen sind.

IV. Zusammenfassung der experimentellen Ergebnisse und theoretische Betrachtungen

1. Schwingungserscheinungen

a) Unabhängigkeit von den Konstanten des Meßkreises

Ein Überblick über den Frequenzbereich, innerhalb dessen Einsattlungen und Eigenschwingungen beobachtet wurden, zeigt, daß alle diese Frequenzen nicht allzu weit voneinander entfernt sind ($0,2\text{--}1,45 \cdot 10^6/\text{sec}$). Diese Tatsache läßt den Verdacht aufkommen, daß unter Umständen im Meßkreis II (vgl. Fig. 1) und nicht im Bogen selbst Eigenschwingungen erregt werden, die die beobachteten Erscheinungen verursachen. Es sind deshalb im folgenden die experimentellen Ergebnisse aufgeführt, die diese Auffassung widerlegen.

1. Ersetzt man die Bogenentladung durch einen konstanten Widerstand, der zwischen den Elektroden angebracht wird und mißt diesen statt des Bogenwiderstandes in Abhängigkeit von der Frequenz, so erhält man als Widerstandskurve eine zur Frequenzachse parallele Gerade; eine Einsattlung ist nicht vorhanden (S. 532 und Fig. 3).

2. Die Größe der beobachteten Frequenz ist vollständig unabhängig von den Daten des Meßkreises und kann beim W-Bogen z. B. allein durch Veränderung des Gasdruckes der Entladung variiert werden.

Durch diese Punkte ist bewiesen, daß die beobachteten Einsattlungen oder Eigenschwingungen nichts mit Eigenschwingungen des Meßkreises II zu tun haben.

b) Plasmaschwingungen und ihre Theorie

In der positiven Säule einer Hg-Niederdruckgasentladung haben Langmuir und Tonks¹⁾ Eigenschwingungen nach-

1) L. Tonks u. I. Langmuir, *Phys. Rev.* **33**, S. 195. 1929. L. Tonks, *Phys. Rev.* **37**, S. 1458. 1931; **38**, S. 1219. 1931. A. v. Engel u. M. Steenbeck, *Elektrische Gasentladungen*, 1. Bd. S. 203, Berlin 1932.

gewiesen. Das Gemisch aus den verschiedenen Gasen, aus denen die positive Säule einer Gasentladung besteht, nämlich dem neutralen Gas, dem Gas der angeregten Moleküle bzw. Atome, dem Elektronengas und dem Ionengas, nennen sie kurz „Plasma“. Das Plasma ist quasineutral, d. h. es sind positive und negative Träger in gleicher Konzentration vorhanden. Ein solches Plasma kann verschiedene charakteristische Eigenschwingungen ausführen. Wenn aus irgendeinem Grunde an einer Stelle ein Überschuß an Trägern einer bestimmten Art und in einem benachbarten Gebiet eine Verarmung eintritt, so haben wir zwei Raumladungen entgegengesetzten Vorzeichens. Zwischen ihnen bildet sich ein elektrisches Feld aus, das die Ladungen wieder ausgleichen will. Infolgedessen schießen die Träger aus dem Gebiet hoher Konzentration in das Gebiet mit Trägerverarmung hinein und bei geringen Gasdrücken (kleiner Stoßzahl) darüber hinaus, lassen also wieder eine Raumladung hinter sich. Dadurch wird ihre Bewegung gebremst und umgedreht. Man erhält also eine Pendelung mit einer bestimmten Frequenz. Langmuir und Tonks unterscheiden drei Fälle:

1. Die Ionen beteiligen sich wegen ihrer großen trägen Masse nicht merklich an den Schwingungen. Wir haben den Fall der reinen Elektronenschwingungen. Für die „Elektronenfrequenz“ ν_e erhalten Langmuir und Tonks

$$(1) \quad \nu_e = \sqrt{\frac{N e^2}{\pi m_e}} = 9 \cdot 10^3 \sqrt{N}$$

(N = Trägerdichte, m_e = Elektronenmasse, e = Elementarladung).

Dabei ist angenommen, daß die Bewegung der Elektronen wie bei einer ebenen Schwingung erfolgt.

2. Für die Schwingungen der positiven Ionen ergibt sich eine analoge Gleichung, wenn man annimmt, daß die ungerichtete Elektronengeschwindigkeit (Elektronentemperatur) sehr hoch ist. Denn in diesem Fall ist die Elektronenkonzentration trotz örtlich verschiedener Ionenkonzentration im ganzen Volumen praktisch konstant. Die Frequenz der reinen Ionenschwingungen ist demnach

$$(2) \quad \nu_i = \sqrt{\frac{N e^2}{\pi m_i}} = 2,1 \cdot 10^3 \sqrt{\frac{N}{M}}$$

(m_i = Ionenmasse, M = Molekulargewicht der betreffenden Ionenart).

Sie ist wesentlich kleiner wie die Elektronenfrequenz, da $m_i \gg m_e$.

3. Im allgemeinen Fall beteiligen sich sowohl Elektronen wie Ionen an der Schwingung. Dies äußert sich nach Lang-

muir und Tonks darin, daß man Ionenschwingungen erhält, deren Frequenz tiefer liegt, als die der reinen Ionenschwingungen nach Gl. (2). Die Entstehung solcher Schwingungen hat man sich folgendermaßen vorzustellen:

Wenn die Elektronentemperatur nicht mehr sehr hoch ist — sie nimmt bekanntlich mit steigendem Druck ab¹⁾ —, so kann auch nicht mehr angenommen werden, daß die Elektronenkonzentration bei einer verschiedenen Ionenkonzentration konstant bleibt. Es werden in jeder Schwingungsperiode Elektronen von den Gebieten hoher Ionenkonzentration aufgesaugt; dadurch werden die Raumladungen und die von ihnen bewirkte elektrische Feldstärke kleiner, was eine Verminderung der Ionenfrequenz bewirkt. Wenn angenommen wird, daß die Ionenverlagerung wie bei einer ebenen Welle erfolgt, ergibt sich folgender Ausdruck für die Ionenfrequenz:

$$(3) \quad \nu_i = \sqrt{\frac{N e^2 / (\pi m_i)}{1 + N e^2 \lambda^2 / (\pi k T_e)}}.$$

Hierin bedeutet k die Boltzmann-Konstante, T_e die Elektronentemperatur und λ die Wellenlänge der ebenen Welle. Man erkennt aus der Formel, daß für den Grenzfall $T_e = \infty$ die einfache Gl. (2) gilt, während ν_i für $T_e = 0$ verschwindet. Die Frequenz kann also theoretisch bis zu beliebigen niedrigen Werten gehen.

Der Frequenzbereich der von Langmuir und Tonks in ihrem Niederdruck-Hg-Bogen nachgewiesenen schnellsten Plasmaschwingungen, nämlich $300\text{--}1000 \cdot 10^6/\text{sec}$ stimmt mit dem nach Gl. (1) für Elektronenschwingungen errechneten Bereich überein. Ferner weisen sie noch langsamere Elektronenschwingungen ($50\text{--}60 \cdot 10^6/\text{sec}$) und Ionenschwingungen (bis herunter zu $1,5 \cdot 10^6/\text{sec}$) nach.

c) *Anwendung der Langmuir-Tonks'schen Theorie auf die vorliegenden Ergebnisse*

Wir müssen uns zunächst folgendes klarmachen. Bei Langmuir ist der Gasdruck von der Größenordnung $0,001$ mm Hg, während sich unsere Versuche in dem Bereich von 10 mm bis Atmosphärendruck bewegen. Es wird deshalb in unserem Fall die Elektronentemperatur viel niedriger sein²⁾ und einen maßgebenden Einfluß auf die Größe der Frequenz ausüben; es kann daher nur die Anwendung der Gl. (3) in Frage kommen. Das zeigt sich auch sofort, wenn man Werte in die Gleichungen einsetzt.

1) R. Seeliger u. R. Hirschert, *Ann. d. Phys.* [5] 11. S. 817. 1931.

2) R. Seeliger u. R. Hirschert, a. a. O.

Für reine Elektronenschwingungen würde man aus Gl. (1), wenn man für die Elektronenkonzentration $N = 10^{14}$ einsetzt, $\nu = 9 \cdot 10^{10}$ erhalten.

Für reine Ionenschwingungen gibt Gl. (2), wenn man auch für die Ionenkonzentration $N = 10^{14}$ wählt:

$$\begin{aligned} \text{für den Hg-Bogen} &: = 0,15 \cdot 10^9, \\ \text{Kohle-Bogen} &: = 4,7 \cdot 10^8 \text{ bis } 4,7 \cdot 10^9, \\ \text{W-Bogen (N}_2\text{)} &: = 5,6 \cdot 10^8, \\ \text{W-Bogen (H}_2\text{)} &: = 21 \cdot 10^8. \end{aligned}$$

Diese Zahlen sind immer noch 100mal größer als die von mir gefundenen.

Für Schwingungen nach Gl. (3) kann man jeden Wert der Frequenz errechnen, je nach der angenommenen Größe der Plasmawellenlänge λ und der Elektronentemperatur T_e . Tatsächlich kennt man aber in unserem Fall diese Größen nicht mit einer Genauigkeit, die auch nur den bescheidensten Anforderungen entsprechen würde. Es ist demnach nicht möglich, zu beurteilen, ob Gl. (3), die von Langmuir und Tonks unter sehr einfachen Annahmen abgeleitet wurde, quantitativ in unserem Falle gilt.

Beschränkt man sich auf rein qualitative Vergleiche, so sieht man folgendes:

Beim Hg- und W-Bogen wurde eine Zunahme der erzeugten Frequenz mit dem Gasdruck gefunden (Figg. 14 und 21). Dies ist in Übereinstimmung mit den Gl. (1) bis (3), die eine Frequenzzunahme mit steigender Trägerdichte verlangen.

Die beim Kohlebogen und bei der Wolframpunktlampe gefundene Frequenzabnahme der virtuellen Schwingungen mit zunehmender Stromstärke (Figg. 5, 6 und 18) läßt sich nicht durch eine Abnahme der Trägerdichte erklären. Denn die Trägerdichte bleibt bei zunehmender Stromstärke zumindest konstant; Nottingham³⁾ hat sogar eine Zunahme der Trägerdichte mit zunehmender Stromstärke festgestellt. Doch läßt sich das von mir gefundene Verhalten vielleicht durch die von Seeliger und Hirschert⁴⁾ in Edelgasen höheren Druckes gemachte Beobachtung erklären, wonach die Elektronentemperatur mit wachsender Stromstärke etwas kleiner wird. Nach (3) würde sich dann auch die Frequenz verkleinern.

1) Müller-Pouille's Lehrb. d. Phys. IV. Bd., 3. Teil, S. 434, Braunschweig 1933.

2) Der zweite Frequenzwert des Kohlebogens ist von $N = 10^{16}$ abgeleitet (R. Mannkopff, Ztschr. f. Phys. 86. S. 161. 1933).

3) W. B. Nottingham, Journ. of the Franklin Inst. 206. S. 43. 1928.

4) R. Seeliger u. R. Hirschert, a. a. O.

Ferner wird die Frequenz der tatsächlichen oder virtuellen Eigenschwingungen um so kleiner, je größer die Trägermasse

Tabelle 1

	Bogengas	Atomgewicht	Gemessener Frequenzbereich
Hg-Bogen	Hg	200	$0,185 - 0,375 \cdot 10^6$
Kohlebogen	{ atm. Luft und C-haltige Bestandteile }	~ 20	$0,25 - 0,435 \cdot 10^6$
W-Bogen	N ₂	14	$0,30 - 0,375 \cdot 10^6$
W-Bogen	H ₂	1	$0,725 - 1,45 \cdot 10^6$

ist — vgl. Tab. 1 —; doch besagt dies nicht allzuviel, da sich ja mit der Änderung der Trägerart nicht nur m , sondern auch λ und T_e ändert.

2. Der Widerstandsverlauf bei steigender Frequenz

Der Tatsachenbestand ist folgender:

a) Bei allen untersuchten Lichtbögen steigt der Widerstand mit der Frequenz sehr stark an, um dann von einer für den Lichtbogen charakteristischen Frequenz an merklich konstant zu bleiben.

b) Ungefähr in dem Frequenzgebiet, in dem der Bogenwiderstand anfängt, von der Frequenz annähernd unabhängig zu werden, können sich Einbuchtungen in der Widerstandskurve zeigen. Diese Einbuchtungen stellen eine abnormale Verminderung des Widerstands in diesem Gebiet dar.

zu a) Rein formal kann man diese Erscheinung auf dem Boden der Lichtbogenbetrachtung, wie sie seinerzeit besonders von H. Th. Simon¹⁾ durchgeführt wurde, durch die Tatsache erklären, daß die mittlere Neigung der sogenannten dynamischen Charakteristik — in Wirklichkeit der Charakteristik für Wellenströme (Überlagerung eines schwachen Wechselstroms über einen Gleichstrom) — mit wachsender Frequenz immer stärker steigend wird und deshalb der Lichtbogen einen immer größeren Widerstand darstellt.

Bezüglich des Mechanismus des Bogens liegt es nahe, anzunehmen, daß bei verhältnismäßig geringen Frequenzen die Ionen sich außer den Elektronen am Stromtransport beteiligen, daß dies aber in um so geringerem Maße der Fall ist, je höher die Frequenz wird. Ist einmal die Frequenz so hoch, daß keine Ionen zum Wechselstromtransport mehr einen Beitrag

1) H. Th. Simon, *Phys. Ztschr.* 7. S. 433. 1906.

liefern können, dann kann sich der Widerstand bei weiter steigender Frequenz nicht mehr ändern. Denn die Träger des Wechselstroms sind jetzt nur noch Elektronen, deren Masse bei Frequenzen ganz anderer Größenordnung eine Abhängigkeit des Widerstandes von der Frequenz ergeben könnte.

zu b) Die Einbuchtungen in der Widerstands-Frequenzkurve sind auf die Möglichkeit von Trägerschwingungen zurückzuführen und zwar weist die Größe der beobachteten Frequenz auf Schwingungen von Ionen hin. Wenn es wirklich zu Eigenschwingungen kommt, so überlagern sich diese dem aufgedrückten Wechselstrom, man beobachtet Mitnahmeercheinungen (S. 544 und 548).

Ist die Dämpfung jedoch zu groß, so wird wenigstens die Amplitude der erzwungenen Trägerschwingungen ein Maximum in der Nähe der Eigenfrequenz der Plasmaionenschwingungen aufweisen.

Man sieht dies auf Grund des folgenden idealisierten Ansatzes¹⁾. Es möge auf ein Ion ein Wechselfeld $E = E_0 \sin \omega t$ in der x -Richtung wirken, dann gilt für die Bewegung des Ions:

$$(4) \quad \ddot{x} + \frac{g}{m_i} \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{e E_0}{m_i} \sin \omega t,$$

worin ω_0 die Eigenfrequenz der ungedämpften Schwingung (in unserem Fall Plasmaionenfrequenz) bedeutet und g ein Faktor ist, der die durch Zusammenstöße bedingte „Reibung“ kennzeichnet.

Ist $\frac{g}{(2m_i)} < 1$, so kommt es zu wirklichen Eigenschwingungen.

Ist $\frac{g}{(2m_i)} > 1$, so sind Eigenschwingungen nicht möglich.

Wir lösen nun Gl. (4) nach x auf und erhalten durch Vergleich mit der Gleichung:

$$(5) \quad \text{Ionenstromdichte } j = N e \dot{x} = \sigma_i E,$$

für die Ionen-Leitfähigkeit:

$$(6) \quad \sigma_i = \frac{N e^2 g}{m_i^2 \left(\left(\frac{\omega_0^2}{\omega} \right)^2 - \omega^2 + g^2 \right)}.$$

Setzt man in dieser Formel $\omega = \omega_0$, so erreicht die Ionenleitfähigkeit ihren größten Wert; für $\omega \geq \omega_0$ nimmt sie ab. Dies wird sich in der Widerstandsfrequenzkurve durch eine Widerstandsverkleinerung (Einsattlung) an der Stelle $\omega = \omega_0$ bemerkbar machen.

1) Vgl. z. B. W. Hasselbeck, Ann. d. Phys. [5] 12. S. 477. 1932.

V. Zusammenfassung

1. An verschiedenen Lichtbogen werden Wechselstromwiderstandsmessungen bis zu einer Frequenz von $1,5 \cdot 10^6$ sec nach der Hagenbach-Wehrlichen Methode ausgeführt.

2. Bei sämtlichen durchgemessenen Bogen zeigt sich eine Widerstandszunahme bei zunehmender Frequenz, die von einem bestimmten Frequenzgebiet an in Konstanz übergeht. Beim Kohlebogen wird der Widerstand erst bei wesentlich höheren Frequenzwerten konstant, als aus der Messung von Duddell hervorgeht.

3. Bei verschiedenen Lichtbogen treten in der Widerstandskurve Einsattlungen auf (Homogenkohlebogen, Effektkohlebogen, Quecksilberbogen, Wolframbogen).

4. Beim Quecksilber- und Wolframbogen lassen sich diese Einsattlungen auf Eigenschwingungen im Bogenplasma zurückführen. Dadurch wird wahrscheinlich gemacht, daß auch in den Fällen, in denen sich Eigenschwingungen im Bogen nicht nachweisen lassen (Homogenkohlebogen, Effektkohlebogen, Wolframbogen), die Einsattlungen doch durch das Vorhandensein von schwingungsfähigen Trägerkomplexen verursacht werden.

5. Ein Vergleich mit der Theorie der Plasmaschwingungen von Langmuir und Tonks zeigt, daß es sich in den beobachteten Fällen nicht um einen der beiden einfachen Grenzfälle: a) Elektronenschwingungen unabhängig von den Ionen oder b) Ionenschwingungen unabhängig von den Elektronen, handeln kann. In dem Fall, der tatsächlich vorliegt, beeinflussen sich die Bewegungen der Ionen und Elektronen sehr stark. Es fehlen in diesem Fall die Unterlagen für einen quantitativen Vergleich zwischen den Versuchen und der genannten Theorie.

Die vorliegende Arbeit wurde im Physikalischen Institut der Technischen Hochschule München ausgeführt. Dem Vorstand des Instituts, Herrn Geheimrat Dr. J. Zenneck möchte ich auch an dieser Stelle für die Anregung hierzu, für die Bereitstellung der nötigen Mittel, sowie für die ständige Unterstützung und Beratung meinen herzlichsten Dank aussprechen.

München, Physikalisches Institut der Technischen Hochschule, Februar 1934.

(Eingegangen 31. Mai 1934)

Dampfdichtebestimmungen nach einer optischen Methode

Von Max Weiß

(Mit 6 Figuren)

Es wird auf Grund der Tatsache, daß die Molekularrefraktion eines Gases in weiten Grenzen vom Druck unabhängig ist, eine Methode zur Bestimmung der Dampfdichte von Gasen und Dämpfen entwickelt, die die Dampfdichte auf 1‰ genau auch bei höheren Temperaturen zu messen gestattet. Gemessen wurden Luft, Kohlensäure, Äther, Äthylchlorid und Äthylnitrit bei 20 und 100°C. Außerdem werden die genauen Molekularrefraktionen und Polarisierbarkeiten obiger Stoffe und des Benzols angegeben.

1. Einleitung

Bei der Bestimmung von Molekülkonstanten wie des elektrischen Momentes, der mittleren optischen und elektrostatischen Polarisierbarkeit und des optischen Polarisationsellipsoides eines Moleküls ist eine genaue Kenntnis der wahren Dichte des untersuchten Gases unbedingt erforderlich. Es ist sehr schwierig und zeitraubend, bei höher siedenden Substanzen zuverlässige Dampfdichtebestimmungen, etwa nach einer der verbesserten Dumaschen Methoden, mit einer Genauigkeit von einem Tausendstel auszuführen. Daher fehlen Messungen, die auf die geforderte Genauigkeit Anspruch erheben können, fast ganz.

Es lassen sich aber nach einer anderen Methode¹⁾ Dampfdichten sehr genau bestimmen. Hierbei geht man davon aus, daß man die Molekularrefraktion, dargestellt durch die Lorenz-Lorentzsche Gleichung $\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \cdot \frac{M}{\rho} = \frac{4}{3} \pi \cdot N \cdot \gamma$, für einen bestimmten Stoff als eine Konstante, da sie tatsächlich weitgehend temperatur- und druckunabhängig ist, annimmt.

1) H. A. Stuart u. M. Weiss, Phys. Ztschr. 33. S. 302. 1932.

Tabelle 1
Molekularrefraktionen. Kohlensäure¹⁾, $\lambda = 5461 \text{ \AA}$

Dichte	$n - 1$	R	Dichte	$n - 1$	R
0,001978	0,0004509	6,68 ₆	0,57813	0,1345	6,65 ₀
0,10526	0,024088	6,68 ₈	0,66330	0,15477	6,63 ₇
0,19239	0,044162	6,68 ₁	0,73692	0,17238	6,62 ₃
0,36509	0,08433	6,67 ₆			

Stoff ²⁾	$R (\lambda = 5890 \text{ \AA})$	
	Flüssigkeit	Dampf
Wasser	3,71	3,70
Chlorwasserstoff	6,88	6,62
Äthylalkohl	12,76	12,92
Äthylchlorid ³⁾ , ⁴⁾ , ⁵⁾	16,23	16,23
Äthylnitrit ³⁾ , ⁴⁾ , ⁵⁾	17,78	17,92
Äther ³⁾	22,47	22,76
Chloroform	21,42	21,28
Benzol ³⁾ , ⁴⁾	26,18	26,56
Tetrachlorkohlenstoff	26,18	26,8

Aus der Tab. 1, die einige Werte enthält, um unsere Annahme zu belegen, sieht man, daß selbst bei großen Dichteunterschieden, wie sie beim Übergang von gasförmig zu flüssig bestehen, die Molekularrefraktionswerte nur um einige Prozente oder weniger voneinander abweichen. So ist die größte Abweichung bei Kohlensäure 1% bei einer Dichteänderung um das 360fache. Man kann also annehmen, daß sich bei einer Druckänderung bis zu einigen Atmosphären die Molekularrefraktion nur um Bruchteile eines Promille ändert. Man darf dann den Ausdruck $\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}$ der Dichte proportional setzen.

1) P. Phillips, Proc. Roy. Soc. (A) **97**. S. 225. 1920.

2) M. Born, Optik, S. 342. Berlin 1933.

3) Nach meinen Messungen.

4) Werte gelten für $\lambda = 5461 \text{ \AA}$.

5) Für Äthylchlorid gibt Fuchs, Ztschr. f. Phys. **63**. S. 824. 1930 die Molekularrefraktion mit 17,62 an. Da aber zwischen diesem Wert und den von mir bestimmten Molekularrefraktionswerten des dampfförmigen Äthylchlorids ein Unterschied von etwa 9% besteht, habe ich auch die Molekularrefraktion des flüssigen Äthylchlorids bestimmt, wobei sich für die D-Linie der Wert 16,17 ergab.

6) Vom flüssigen Äthylnitrit haben W. Strecker u. R. Spitaler (Ber. Dtsch. Chem. Ges. **59**. S. 1754. 1926, Marburg) die Molekularrefraktion für verschiedene Wellenlängen bestimmt, woraus ich den angegebenen Wert durch Interpolation erhalten habe.

Damit ist die Dichtebestimmung auf eine Messung der Druckabhängigkeit des Brechungsindex zurückgeführt. Man kann in kleinen Druckbereichen auf einer Isotherme die Dichte durch eine quadratische Funktion des Druckes genügend genau darstellen.

$$\varrho = a'p + b'p^2$$

Aus den vorhergehenden Überlegungen folgt dann:

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = c \cdot \varrho = ap + bp^2,$$

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \cdot \frac{1}{p} = a + bp,$$

d. h. das Glied b gibt die Abweichung vom idealen Gasgesetz an. Ist $b=0$, so bedeutet das Proportionalität zwischen Druck und Dichte; in diesem Falle ist das Boyle-Mariottesche Gesetz erfüllt, und in der graphischen Darstellung (Fig. 1) erhält man eine Parallele zur p -Achse. Die Ordinatenabschnitte für den Druck $p=0$ verhalten sich umgekehrt wie die absoluten Temperaturen. Die reale Dichte bei der Temperatur t und dem Druck p_1 ist dann:

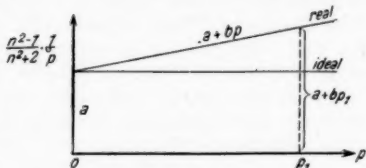


Fig. 1

$$\varrho = \frac{a + bp_1}{a} \cdot \varrho_i = \varrho_i \left(1 + \frac{b}{a} \cdot p_1 \right).$$

ϱ_i ist die ideale Dichte bei der Temperatur t und dem Druck p_1 ; a und b sind bei einer bestimmten Temperatur (Isotherme) konstant.

2. Apparatur

Zur Messung des Brechungsindex des zu untersuchenden Gases oder Dampfes wurde ein Jaminsches Interferometer benutzt. Als Lichtquellen dienten eine Osram-Na-Dampflampe und eine Quecksilberkapillarlampe nach v. Hippel¹⁾ mit Grünfilter für $\lambda = 5461 \text{ \AA}$.

Die beiden Spiegel des Interferometers waren auf zwei Rohren montiert und hatten eine Entfernung von 1,25 m voneinander. Zwischen ihnen war ein Mantelgefäß aus Messingrohr (Fig. 2), das Rohrstutzen R zur Aufnahme der Meßröhren M enthielt, auf einem stabilen Gestell montiert. Die im Strahlen-

1) v. Hippel-Harries, Phys. Ztschr. 33. S. 81. 1932.

gang befindlichen Meßröhren mit planparallelen Endplatten waren mit Porzellankitt eingekittet (Fig. 2, K).

Diese beiden Röhren bestanden aus je zwei zusammen-
geschmolzenen Kolorimeterrohren¹⁾ aus Jenaer Geräteglas, die
vorher aus einer großen Zahl passend ausgesucht wurden. Die

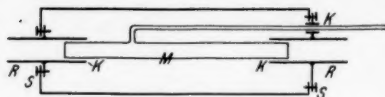


Fig. 2

Apparatur war so ge-
baut, daß der innere
Teil mit den Meßröhren
mittels der Schrauben S
herausgenommen werden
konnte, ohne daß die
Kittstellen gelöst zu

werden brauchten. Das eine Rohr war vollkommen zu-
geschmolzen, so daß sich hierbei während einer Meßreihe die
Dichte nicht änderte. Als Verschlüsse wurden bei Luft und
Kohlensäure gefettete Hähne verwandt, die bei den Messungen
an den organischen Dämpfen durch Barometerverschlüsse er-
setzt wurden.

Das Mantelgefäß, in dem sich die beiden Meßröhren be-
fanden, war mit Asbest umkleidet und wurde während den
Messungen mit Hilfe eines Thermostaten auf konstanter Tem-
peratur gehalten, indem bei der 20°-Messung Wasser und bei
der 100°-Messung Wasserdampf hindurchströmte. Der Dampf,
in einem elektrisch geheizten Siedegefäß erzeugt, umspülte
die Meßröhren, wurde dann in einem Rückflußkühler kon-
densiert und in das Siedegefäß zurückgeleitet. Dieses war
gegen die Apparatur abgeschirmt, um eine unerwünschte
Wärmestrahlung zu verhindern.

Die Wanderung der Streifen wurde mit einem Fernrohr,
das mit einem Okularmikrometer ausgerüstet war, beob-
achtet. Das Okularmikrometer gestattete eine Ablesung von
0,01 Streifen. Diese Genauigkeit konnte leider nicht aus-
genutzt werden, da trotz sorgfältigen Aufbaus und Ein-
schlusses des Strahlenganges in Asbeströhren ein absoluter
Stillstand der Streifen nicht zu erzielen war. Auf diese
Schwierigkeit weist auch Hallwachs²⁾ hin, wobei er Luft-
schwankungen als Ursache bezeichnet.

Zur Druckablesung wurde ein Quecksilbermanometer mit
Spiegelskala benutzt. Die Zehntelmillimeter wurden geschätzt.
Hierbei kann man einen maximalen Fehler von 0,3 mm an-
nehmen. Bei 760 mm hat man dann eine Ungenauigkeit von
 $0,4\%_{00}$ in der Druckablesung, die allerdings bei niedrigen

1) Von der Firma Schott und Gen., Jena.

2) W. Hallwachs, *Ann. d. Phys.* 47. S. 380. 1892.

Drucken erheblich größer wird. So ergibt sich, wenn man den Ablesefehler von 0,3 mm zugrunde legt, bei einer Druckdifferenz von 100 mm schon ein Fehler von 3‰ .

Das Meßrohr, das sich im Strahlengang befand, hatte eine Länge von $355,3 \pm 0,1$ mm. Der Fehler in der Länge beträgt also $0,3\text{‰}$.

Die Endplatten des Meßrohres müssen möglichst parallel verlaufen. Bilden sie nämlich einen Winkel miteinander, so wirkt das Meßrohr wie ein Prisma, das die Lichtstrahlen ablenkt, und zwar zunehmend mit steigendem Druck. Um den Einfluß dieses Effektes zu bestimmen, wurde bei einem Meßrohr der Winkel, um den die Endplatten von der Parallelität abwichen, mit Hilfe eines modifizierten Spektrometers zu $38'$ bestimmt. Die zusätzliche Streifenverschiebung, die sich aus diesem Winkel und den Brechungsindizes ergibt, bleibt, wie eine einfache Überschlagsrechnung zeigt, unterhalb der Meßgenauigkeit.

Die Streifenwanderung wurde schrittweise beobachtet, d. h. der Dampf wurde solange in die Apparatur eingelassen und die Streifenverschiebung zählend verfolgt, bis der Druck um ungefähr $\frac{1}{12}$ des höchsten erreichbaren Druckes gestiegen war. Die Streifen wurden solange beobachtet, bis sich Temperatur und Druck innerhalb der Apparatur ausgeglichen hatten. Auf diese Weise erhielt man eine bestimmte Streifenverschiebung für eine bekannte Druckdifferenz. Nun konnte wieder Dampf um den oben angegebenen Betrag eingelassen werden, wonach Streifenzahl und Druck festgestellt wurden. Eine Meßreihe erstreckte sich über einen Zeitraum von etwa 1—3 Std. Um eine Kontrolle über eine zusätzliche Streifenwanderung, die infolge langsamer thermischer Ausgleichsvorgänge eintreten könnte, zu haben, wurde vor und nach jeder Messung mit weißem Licht beleuchtet und die Stellung des schwarzen Streifens abgelesen. Hierdurch wurde der Anfangs- und Endpunkt der Meßreihe genau festgelegt. Die Schwankungen, die innerhalb der Meßreihe auftraten, wurden durch gehäufte Beobachtungsreihen eliminiert.

3. Einfluß von Adsorptionsschichten

Einen wesentlichen Fehler bei Messungen an Dämpfen kann die Bildung von Adsorptionsschichten verursachen, wie sie von Zahn¹⁾, Wolf²⁾ und Fuchs³⁾ bei D.-K.-Messungen

1) C. T. Zahn, *Phys. Rev.* **27**. S. 329. 1926.

2) K. Wolf, *Ann. d. Phys.* **83**. S. 884. 1927.

3) O. Fuchs, *Ztschr. f. Phys.* **63**. S. 824. 1930.

beobachtet worden sind. So hat Zahn aus seinen Messungen an Wasserdampf eine adsorbierte Schicht von $8,25 \cdot 10^{-5}$ cm Dicke ermittelt.

Die Bildung von Adsorptionsschichten verursacht eine zusätzliche Streifenwanderung. Nun ergibt sich aus der Arbeit von Fuchs, daß sich diese Schichten bei den Anfangsdrucken (bis zu etwa 40 mm Hg) ausbilden und dann konstant bleiben. Man könnte also diesen Fehler vermeiden, wenn man die Meßpunkte bei den Anfangsdrucken nicht berücksichtigt.

Der Einfluß der Adsorptionsschichten kann auch dadurch klein gehalten werden, das entsprechend lange Interferometerrohre gewählt werden. Wir haben festgestellt, daß die Adsorptionsschichten bei flüchtigeren Substanzen sich nicht in einer derartigen Dicke ausbilden, daß sie die Messung fälschen könnten. Nur bei Benzol störten die adsorbierten Schichten. Aus meinen Messungen an Benzol, einmal zwischen 20—80 mm Hg, dann von 0—80 mm Hg, ergibt sich eine Schichtdicke $9 \cdot 10^{-5}$ cm.

4. Meßergebnisse

Untersucht wurden Luft, Kohlensäure, Äthyläther, Äthylchlorid, Äthylnitrit und Benzol. Außer Luft und Benzol ist jedem Stoff je eine Kurve bei 20° und 100° C beigelegt.

Luft mit Kalilauge von Kohlensäure befreit und mit Phosphorpentoxyd getrocknet.

Kohlensäure aus einer Stahlflasche entnommen und mit konzentrierter Schwefelsäure oder Phosphorpentoxyd getrocknet.

Äthyläther pro analysi, über Na destilliert, von Schering-Kahlbaum bezogen.

Äthylchlorid (Hennings Chloräthyl).

*Äthylnitrit*¹⁾.

Benzol pro analysi von Schering-Kahlbaum bezogen.

Die flüssigen Stoffe $((C_2H_5)_2O, C_2H_5Cl, C_2H_5ONO$ und $C_6H_6)$ wurden in ein Vorratsgefäß eingefüllt und im Vakuum wiederholt destilliert, um sie luftfrei zu machen.

In der Tab. 2 bedeuten Δp die wegen der Temperatur und des Barometerstandes korrigierte Druckdifferenz in mm Hg, Δs die für Δp beobachtete Zahl der durchgewanderten Streifen. $p = \sum \Delta p$, $s = \sum \Delta s$; die letzte Spalte gibt den zum Druck p gehörenden Wert $\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \cdot \frac{1}{p}$ an. Die Ergebnisse für die anderen Stoffe sind in den Figg. 3 bis 6 dargestellt.

1) Herr Prof. Sonn hat uns Äthylnitrit für die Messung zur Verfügung gestellt, wofür wir ihm auch an dieser Stelle vielmals danken möchten.

Tabelle 2
Äthylchlorid bei 20° C

Δp	Δs	p	s	$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \cdot \frac{1}{p}$
114,0	99,31	0,0	0,00	—
126,1	111,23	114,0	99,31	0,8926
124,2	110,93	240,1	210,54	0,8985
116,6	104,99	364,3	321,47	0,9042
71,6	65,85	480,9	426,46	0,9087
52,5	47,99	552,5	492,31	0,9131
52,0	47,92	605,0	540,30	0,9151
38,1	35,18	657,0	588,22	0,9174
77,4	72,11	695,1	623,40	0,9189
		772,5	695,51	0,9225

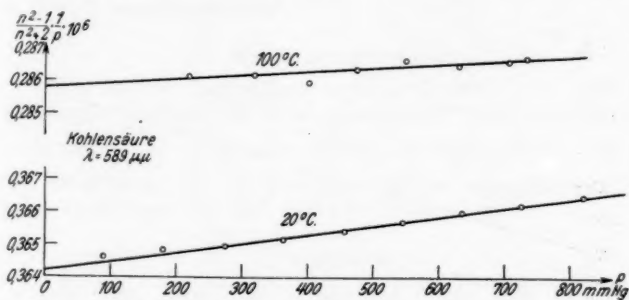


Fig. 3

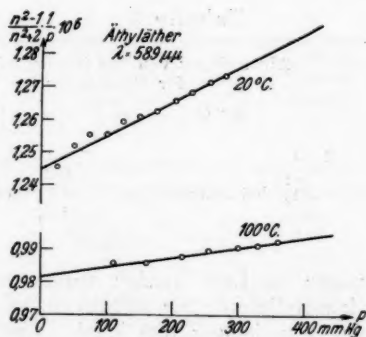


Fig. 4

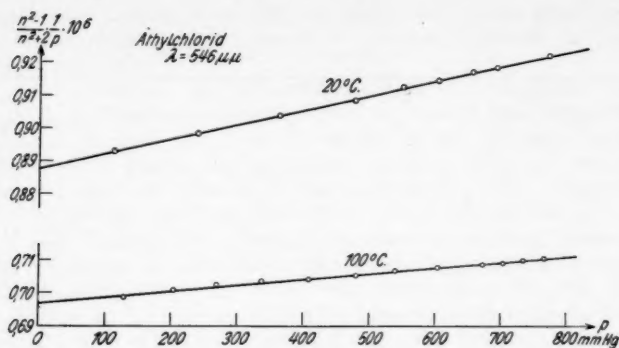


Fig. 5

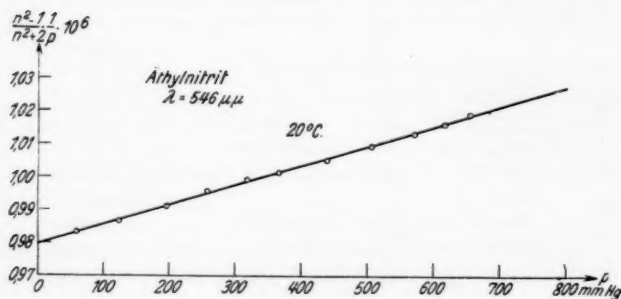


Fig. 6

Tabelle 3

Stoff	Abweichung von der idealen Dichte in % für 760 mm Hg bei	
	20°C	100°C
Luft	< 0,1	< 0,1
CO_2	0,5 ₁	0,3 ₁
$(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{O}$	3,1 ₈ (bei 380 mm Hg)	1,1 ₆ (bei 380 mm Hg)
$\text{C}_2\text{H}_5\text{Cl}$	3,8 ₂	1,9 ₂
$\text{C}_2\text{H}_5\text{ONO}$	4,6	—

Die Messungen an Luft wurden vorgenommen, um die Apparatur zu kontrollieren. Sie zeigten innerhalb der Meßgenauigkeit keine Abweichung vom idealen Gasgesetz, wie es zu erwarten war. So verhielten sich nicht nur die Ordinaten

bei $p = 0$, sondern auch bei $p = 760$ mm Hg umgekehrt wie die absoluten Temperaturen.

Bei Kohlensäure können die Messungen von Heuse und Otto¹⁾, Chappuis²⁾ und Amagat³⁾ zum Vergleich herangezogen werden, aus denen Prof. Otto folgende 20°-Isotherme berechnete:

$$p \cdot v = 1,08079 - 6,33 \cdot 10^{-3} \cdot p + 15,834 \cdot 10^{-6} \cdot p^2 \\ - 0,991 \cdot 10^{-9} \cdot p^3.$$

Hieraus folgt für 760 mm Hg eine Abweichung von 0,58₄% in guter Übereinstimmung mit meinem Ergebnis. Damit ist die Brauchbarkeit vorliegender Methode bestätigt.

Äthylnitrit wurde nur bei 20° C gemessen, da bei 100° C eine Zersetzung zu befürchten war. Die aus den Beobachtungen berechneten Abweichungen von der idealen Dichte sind in Tab. 3 zusammengestellt.

5. Molekularrefraktionen

Wie vorher ausgeführt wurde, ergaben sich aus den Messungen zunächst die Brechungsindizes. Diese und die mit Hilfe der $\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \cdot \frac{1}{p}$ -Kurven ermittelten realen Dichten wurden zur Berechnung der in folgender Tabelle angegebenen Molekularrefraktionen bei 20° und 100° C benutzt.

Tabelle 4

Dampf

Stoff	λ in ÅE	760 mm Hg; 20° C		760 mm Hg; 100° C		$\alpha \cdot 10^{25}$
		n	M. R.	n	M. R.	
CO ₂	5893	1,0004176	6,67	1,0003266	6,66	26,1
(C ₂ H ₅) ₂ O ⁴⁾	5893	1,0007319	22,76	1,0005658	22,84	89,6
C ₂ H ₅ Cl	5461	1,001051	16,23	1,0008097	16,21	63,9
C ₂ H ₅ ONO	5461	1,001169	17,92	—	—	70,5

Aus der Molekularrefraktion läßt sich nun leicht die mittlere Polarisierbarkeit mittels der Beziehung

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \cdot \frac{M}{\rho} = \frac{4}{3} \pi \cdot N_0 \cdot \alpha$$

- 1) W. Heuse u. J. Otto, Ann. d. Phys. [5] 2. S. 1012. 1929.
- 2) J. Chappuis, Trav. Bur. Int. 13. S. 66. 1903.
- 3) E. H. Amagat, Ann. d. chim. et phys. 29. S. 68. 1893.
- 4) Bei Äther ist n für 380 mm Hg angegeben.

berechnen. α bedeutet das mittlere vom Felde 1 pro Molekül induzierte Moment. Die Werte für α sind in der letzten Spalte der vorhergehenden Tabelle angegeben.

Die Messungen an Benzol wurden infolge Bildung von Adsorptionsschichten so gestört, daß eine Bestimmung der Abweichung vom idealen Gasgesetz unmöglich war. Doch ließ sich aus den Messungen zwischen 20 und 80 mm Hg bei 25° C die Molekularrefraktion mit einer Unsicherheit von höchstens 1 % bestimmen (vgl. Tab. 5).

Tabelle 5

λ	p mm Hg	$(n-1) \cdot 10^6$	M.R.	$\alpha \cdot 10^{25}$
5461 ÅE	80	171,6	26,6	105

Die Molekularrefraktion des flüssigen Benzols ist 26,38 (Landolt-Börnstein). Wasastjerna¹⁾ hat die Molekularrefraktion des gasförmigen Benzols zu 27,2 für die D-Linie bestimmt. Dieser Wert ist größer als der von mir gefundene, was darauf schließen läßt, daß der von ihm bestimmte Brechungsindex infolge von Adsorptionsschichten größer ausfiel, als er der tatsächlichen Dampfdichte entsprechen würde. Als Beleg füge ich die Tab. 6 bei, die in der ersten Spalte den Quotienten $\sum \frac{\Delta s}{\Delta p}$ von sechs Messungen an Benzol, die mit dem Druck $p=0$ (Vakuum) begannen, und in der zweiten $\sum \frac{\Delta s}{\Delta p}$ von sechs anderen Benzolmessungen enthält, bei denen die Streifen-

Tabelle 6

$\sum \frac{\Delta s}{\Delta p}$	
p von 0	p von 20 mm
bis ungefähr 80 mm gemessen	
1,421	1,390
1,393	1,394
1,390	1,394
1,428	1,398
1,444	1,403
1,423	1,398
Mittel: 1,416 ₅ \pm 0,016 ₇	1,396 ₂ \pm 0,003 ₅

1) J. A. Wasastjerna, A. Soc. Scient. Fenn. 2. No. 13. 1924.

zählung erst bei $p = 20$ mm Hg begann. Man sieht, daß die Bildung von Adsorptionsschichten einen höheren Wert für den Brechungsindex vortäuscht und außerdem die Messungen vielmehr streuen. Berechne ich aus den zwischen 0 und 80 mm Hg ausgeführten Messungen die Molekularrefraktion, so ergibt sich ein um ungefähr 2 % höherer Wert, der mit dem von Wasastjerna gefundenen gut übereinstimmt.

6. Brechungsindizes

Bei Gasen werden die Brechungsindizes im allgemeinen für 0°C und 760 mm Hg angegeben. Es ist üblich die Beobachtung (meist bei Zimmertemperatur ausgeführt) ideal zu reduzieren, d. h. es wird gesetzt:

$$n_0 - 1 = (n - 1)_{\text{beob.}} \cdot \frac{T_{\text{beob.}}}{273,6} \cdot \frac{760}{p_{\text{beob.}}}$$

(n_0 Brechungsindex bei 0°C und 760 mm Hg.)

Da aber die Dichten der realen Gase und Dämpfe vom Boyle-Mariotteschen Gesetz bis zu einigen Prozenten abweichen, so sind die in dieser Weise reduzierten Brechungsindizes, wie sie auch im Tabellenwerk von Landolt-Börnstein aufgeführt werden, nicht genau definiert und mit einem Fehler bis zu einigen Prozenten in dem Sinne behaftet, daß die ideal reduzierten Werte zu klein ausfallen. Nur die bei einer bestimmten Temperatur und einem bestimmten Druck gemessenen Werte, sofern diese von den Verf. angegeben werden, sind natürlich exakt definiert.

Um nun diesen Fehler bei der Angabe der Brechungsindizes zu vermeiden, gibt man am besten den „idealen“ Brechungsindex an, — d. h. den Brechungsindex, den das Gas haben würde, falls es unter Normalbedingungen ideal wäre — indem man nach dem Vorgang von Cuthbertson¹⁾ nach der Formel:

$$n - 1_{\text{id.}} = (n - 1)_{\text{beob.}} \cdot \frac{\varrho_i}{\varrho_r} \quad \text{reduziert.}$$

($n - 1$ idealer Brechungsindex; $(n - 1)_{\text{beob.}}$ beobachteter B.I.; ϱ_i ideale Dichte bei 0°C und 760 mm Hg; ϱ_r reale Dichte unter den Beobachtungsbedingungen).

So ist es auch möglich, Brechungsindizes, die unter verschiedenen Versuchsbedingungen gemessen wurden, miteinander zu vergleichen, sofern die realen Dichten genau bekannt sind.

1) C. u. M. Cuthbertson, Proc. Roy. Soc. A. 97. S. 152. 1920.

Lowery¹⁾ hat Brechungsindizes unter Berücksichtigung der Abweichungen vom idealen Gasgesetz gemessen, indem er eine abgewogene Menge der zu untersuchenden Substanz in die genau kalibrierte Apparatur hineinläßt und so die Dichte bestimmt. Da aber ein Teil des Stoffes an den Wänden haften bleibt und daher optisch nicht wirksam ist, ergibt sich ein zu kleiner Brechungsindex. Damit erklärt sich auch der Unterschied zwischen den Werten Lowerys und meinen an Ätherdampf. Lowery gibt für den Brechungsindex, falls der Dampf bei 0° C und 760 mm Hg ideal wäre, den Wert $n_{D_{id.}} - 1 = 0,001505$ an, während ich aus meinen Messungen $n_{D_{id.}} - 1 = 0,001523$ errechne.

Die beiden Werte weichen also um 1,3 % voneinander ab.

Zum Schluß stelle ich noch in Tab. 7 die „idealen“ Brechungsindizes der von mir gemessenen Stoffe zusammen.

Tabelle 7

Stoff	λ Å	$n_{id.} - 1$ (0° C, 760 mm Hg)
CO ₂	5890	0,0004481
(C ₂ H ₅) ₂ O	5890	0,001523
C ₂ H ₅ Cl	5461	0,001085
C ₂ H ₅ ONO	5461	0,001254

Herrn Dr. H. A. Stuart bin ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für wertvolle Hilfe zu großem Dank verpflichtet. Insbesondere danke ich auch Herrn Prof. R. Gans für sein stetes Interesse und die fördernde Unterstützung, die er der vorliegenden Untersuchung zuteil werden ließ.

1) H. Lowery, Proc. Roy. Soc. A. **133**. S. 188. 1931.

Königsberg i. Pr., II. Physikalisches Institut.

(Eingegangen 13. Juni 1934)